國立苑裡高中 100 學年度第一次教師甄試 數學科 題目卷

請注意：

※題目共兩頁。

※作答時請註明題號，寫於答案卷上，不必抄題。

一、 單一選擇題：每題 5 分，共 5 分

1. 有一道題目：「設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ ，$n\in N$ ，$n>2$ ，求 $\omega\cdot\omega^2\cdot\omega^3\cdots\omega^n$ 之值」。而阿煌在解這一題時，所用的步驟(A)至(E)如下：$\omega\cdot\omega^2\cdot\omega^3\cdots\omega^n=$ ，請問阿煌的作法，從哪一步驟開始錯誤？

   (A) $=\omega^{1+2+3+\cdots+n}$ (B) $=\omega^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (C) $=(\omega^n)^{\frac{n+1}{2}}$ (D) $=1^{\frac{n+1}{2}}$ (E) $=1$ 。　　答：________

二、 填充題：每題 5 分，共 75 分

1. 設 $x,y,z\in N$ 且 $xy+yz+zx=xyz$ ，則數對 (x,y,z) 之解有________組。

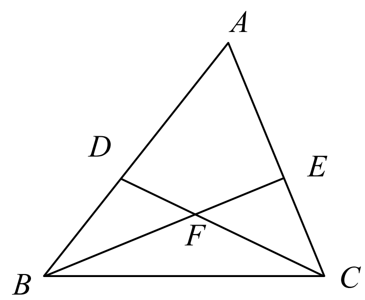
2. 設 $a_n=\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$ ，則 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{1000}=$________。

3. 求 $\sum_{n=1}^{99}\frac{2n+1}{1^3+2^3+\cdots+n^3}=$________。

4. 設 $4x^3+3x^2+2x+1=0$ 三根爲 α,β,γ ，則 $\frac{1}{\alpha^5}+\frac{1}{\beta^5}+\frac{1}{\gamma^5}=$________。

5. 設 A,B 皆爲三位數的正整數，而 $B>900$ ，若 B 之常用對數尾數爲 A 的 2 倍，則數對 $(A,B)=$________。

6. 求 $\sin\frac{4\pi}{11}\cdot\sin\frac{8\pi}{11}\cdot\sin\frac{12\pi}{11}\cdot\sin\frac{16\pi}{11}\cdot\sin\frac{20\pi}{11}=$________。



7. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{CD}$ 交 $\overline{BE}$ 於 F ，已知 $\triangle BDF$ 面積爲 10 ，$\triangle BCF$ 面積爲 20，$\triangle CEF$ 面積爲 16，則四邊形區域 $ADFE$ 之面積爲________。

8. 空間中兩直線 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$ ，$L_2:\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-3}$ 所夾之鈍角角平分線方程式爲________。

9. 已知正$\triangle ABC$內一點P到三頂點A、B、C之距離分別爲5、12、13，則$\triangle ABC$之邊長爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

10. 空間中10個相異平面，最多能將空間分割成＿＿＿＿＿＿個區域。

11. 設橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$與雙曲線$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$有公共焦點。當以它們的「交點」爲頂點的四邊形面積爲最大時，則數對$(A,B)=$＿＿＿＿＿＿＿。

12. 如右下圖，以5種不同顏色著色，相鄰區域須塗不同色，則有＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿種塗法(以標準分解式表之)。

A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_{n-1}	A_n
B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_{n-1}	B_n

共2列n欄

13. 在正△內任取一點，向三邊做垂直線段，則此三垂直線段長可作爲一△三邊長的機率爲＿＿＿＿＿＿＿。

14. 設$(1+x)^n=C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+C_3^n x^3+\cdots+C_n^n x^n$，則$C_1^n+2^2C_2^n+3^2C_3^n+4^2C_4^n+\cdots+n^2C_n^n=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

15. A袋中有2個10元硬幣，B袋中有3個5元硬幣，從A,B兩袋各取一硬幣互換，如此進行三次，則A袋中錢數的期望值爲＿＿＿＿＿＿＿元。

三、 計算證明題：共 20 分

1. 設$P(x_0,y_0)$爲圓錐曲線$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$上一點，試證明過$P(x_0,y_0)$之切線方程式爲

$$Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x+x_0}{2}+E\cdot\frac{y+y_0}{2}+F=0$$ (10 分)

【證明】：

2. $\triangle ABC$中，已知$a=\overline{BC}$，$b=\overline{CA}$，$c=\overline{AB}$，試證明：$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$ (10 分)

【證明】：

國立苑裡高中 100 學年度第一次教師甄試 數學科 答案

一、 單一選擇題：每題 5 分，共 5 分

1. (C)

二、 填充題：每題 5 分，共 75 分

1. 10	2. $\frac{1001}{501}$	3. $\frac{9999}{2500}$	4. -22	5. $(310,961)$
6. $-\frac{\sqrt{11}}{32}$	7. 44	8. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{13}=\frac{z+3}{5}$	9. $\sqrt{169+60\sqrt{3}}$	10. 176
11. $(-\frac{7}{2},\frac{7}{2})$	12. $2^2\times5\times13^{n-1}$	13. $\frac{1}{4}$	14. $n\times2^{n-1}+n(n-1)\times2^{n-2}$	15. $\frac{505}{36}$

三、 計算證明題：共 20 分

略