

92 年台北市國中數學略解

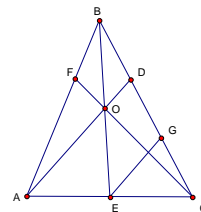
1. [國二下]可以得到 $\angle AED = 60^\circ$, $\angle CED = 75^\circ$, $\angle AEB = 75^\circ$
因此 $\angle CEB = 150^\circ$, $\angle ECB = 15^\circ$

2. [國二上與國三上]可以得到 $\overline{BD} = \overline{AB} = 8$, $\overline{CE} = \overline{CA} = 6$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{DE} = 4$,

$$\overline{BE} = 4 , \overline{CD} = 2 , \overline{DF} = \frac{4}{5} \overline{CD} = 1.6$$

3. [國三上] 先按照題意畫圖，之後過 E 做 \overline{AD} 平行線交 \overline{BC} 於 G 點，

$$\text{則 } \overline{OD} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \frac{1}{4} \overline{AD} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{1}{3} \overline{AO} = 4$$



4. [國三上]慢慢做，仔細做就可以得到答案 $\overline{BD} = 36$
5. [益智問題]我有做過很多類似的問題，所以不知道要怎麼講才好，尋求兩圖相同的結構，就可以發現 3-4-3 是重複的，所以要移動另外 5 個。
6. [排列組合]千位數有四個，其餘五個。 $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$
7. [國一上] $(2002 \times 2003 \times 2004 + 2005^3) \equiv (0 + 3^3) \pmod{7} \equiv 6 \pmod{7}$ 因為 2002 是 7 的倍數
8. [國一上，用國二上技巧解比較快]令 $x = 2^{20}$, $(x^6 - 1, x^5 - 1) = x - 1 \Rightarrow 2^{20} - 1$
9. [鴿籠原理]所以 $3+1=4$
10. [小學]我都偷吃步，距離找 $[240, 360] = 720$ 下去代。所以去程 3 小時，回程 2 小時，平均速率 $= 1440 / (2+3) = 288$
11. [國二上] $1700 < x^2 < 1800$, $x = 42$, $42^2 = 1764$, 所以 1776 年 54 歲。
我有背一到一百的平方，這題就近乎秒殺。
12. [遞迴]遇到這種題目，我一定寫到他循環為止，需要的是細心跟耐心。100 年中區也有考一題，寫出來就可以知道是 3 了。
13. [指數?]先換回十進位+。
14. [高一上]等於在問 51 以內，和 51 互質的數有多少個？
 $51 - 3 - 17 + 1 = 32$
15. [高一上] $f(27) = 9 + f(24) = 9 + 8 + f(21) \dots = 9 + 8 + 7 + 6 + \dots + 1 = 45$
16. [高一上] $f(n) = n(n+1)$, $f(n+4) = (n+4)(n+5) = 4n(n+1) + n$,
 $n^2 + 9n + 20 = 4n^2 + 5n \Rightarrow 3n^2 - 4n - 20 = (3n-10)(n+2) = 0$
小陷阱：必須是正整數，所以無解。
17. [機率](A) $\frac{C_1^4}{2^4} = \frac{1}{4}$ (B) $\frac{C_5^8}{2^8} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}$ (C) $\frac{C_6^{10}}{2^{10}} = \frac{210}{1024}$ (D) $\frac{C_7^{12}}{2^{12}} = \frac{792}{4096}$
18. [微積分—收斂性](A)p 級數， $p=1$ ，發散 (B)交錯級數， $r=1$ 發散
(C)分子比分母大，發散
(D)當成 p 級數看，或直接展開都可以知道收斂

19. [群論]這我死背的，應該不難，但我不會
20. [國二]這條垂直線會交三角形於 $(x,1)$ 與 $(x,\frac{x}{9})$ 看是要海龍還是底乘高去算面積都可以，答案是 $x=3$
21. [指數]呼嚨人的表示法而已，其實把它當作 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ 就好
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$ ，所以三邊長必須相等，也就是正三角形。
22. [馬可夫鏈]難在找出轉移矩陣，我自己練了五六題才抓到感覺。

白 藍 紅 黑

本題為 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ ，初始矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，用轉移矩陣連乘五次，就會得到

$\begin{bmatrix} 21 \\ 81 \\ 20 \\ 81 \\ 20 \\ 81 \\ 20 \\ 81 \end{bmatrix}$ ，答案就出來了。

23. [國三]先求出內切圓半徑 $r = \frac{10}{3}$ ，就可以得到 $\overline{DE} : \overline{BC} = \frac{16}{3} : 12 = 4 : 9$ ，面積為平方比，所以 $\Delta ADE = \frac{16}{81} \Delta ABC = \frac{960}{81}$
24. [國三]連 \overline{CF} ，斜邊：長股 = $6 : r = 2r : 8, 2r^2 = 48, \pi r^2 = 24\pi$
25. [國二] $2^{24} - 1 = (2^8 - 1)(2^{16} + 2^8 + 1)$ ，所以 255
26. [高一]這種題目我也都代數字，讓 $a = -1$ ，所以只有(C)對
27. [國三]直線跟拋物線交於 $(0,b)$ ，而且拋物線對稱於 y 軸，只有(A)對
28. [高一]我一看覺得(B)跟人不一樣，就選他了。原因是 $4(n^2 + n + 1)$ ， $(n^2 + n + 1)$ 必不為平方數，判別式 < 0
29. [高一]中國餘數定理，可以算出符合的條件為 $9+20n$ ，只有 9,29,49,69,89 和為 245
30. [國三]以 A 為圓心， \overline{AB} 做出 ΔBCD 的外接圓，題目是給圓心角，問的是圓

周角，比例是相同的。

31. [高一—強迫分解]可化為 $(x-8)(y-8)=64$ ，但是很喜歡搞陷阱，台北市跟中區今年都有考，我居然還踩中陷阱，蠢斃了。

32. [高二]相切就先把方程式相減，減完之後有重根。

$$x^2 - (k+2)x + 4 = 0, \quad k+2 = 4, -4, k = -6, 2, \text{ 相加為 } -4$$

33. [國三]考海龍，算出來 $r = \frac{\sqrt{231}}{6} = \frac{15.多}{6} = 2.5多$ ，最接近 3

34. [微積分—積分應用求面積]分清楚上下就好，找出交點（積分上下界），再

$$\text{用上減下。於是 } \int_{-2}^2 [(-x^2+6)-(x^2-2)]dx = -\frac{2}{3}x^3 + 8x \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$

35. [高一—強迫分解] $x+128-(x-4)=132=(\sqrt{x+128}+\sqrt{x-4})k$ ，比較困難的是

概念，知道 $\sqrt{x+128}$ 與 $\sqrt{x-4}$ 是同奇同偶。 $\sqrt{x+128} > 11$ ，所以

$$132 = 2 \times 66 = 6 \times 22, \text{ 符合的最大值為 } 6。$$

36. [微積分—乍看像黎曼和，其實不是]每一項都當作 $\frac{1}{2n}$ ，有 n 個，所以 $\frac{1}{2}$

37. [二項式定理]可以化為 $C_2^{93} - C_1^{93} = 4185$

38. [排列組合]這題我用正面表列(1,1,2,2,2)有 10 種

$$(0,1,2,2,2) \text{ 有 } \frac{5!}{3!} - \frac{4!}{3!} = 20 - 4 = 16 \text{ 種}$$

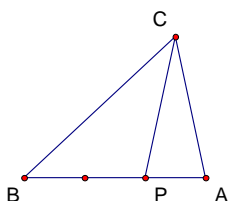
$$(0,1,1,2,2) \text{ 有 } \frac{5!}{2!2!} - \frac{4!}{2!2!} = 30 - 6 = 24 \text{ 種} \quad \text{總共 } 50 \text{ 種}$$

39. [二次曲線]先將橢圓寫成標準式： $\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$ 所以 $\begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow c=4$

左右型，按定義 $\overline{AC} + \overline{BC} = 2a = 10$ ， $\overline{AB} = 2c = 8$ ，故周長 = 18

40. [向量] $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = -2\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{AP}$ 轉換成圖形如下

$$\text{所求} = \frac{1}{2}$$



整體來看，題目不難，除了一題莫名其妙出現的群論之外，微積分不多，矩陣不多，主要在題目的重新描述，或概念轉換。我會給「和藹可親」。