

基隆市 95 學年度市立高中國中部暨國民中學新聘教師聯合甄選「數學科」試題

注意事項：

1、請核對答案本上准考證號碼是否正確，並於答案本上作答。

2、每題均為單選題，請選出一個正確答案或最佳答案；每題 4 分，答錯不倒扣，總分 100 分。

一、單選題：

1、甲、乙兩人分別從 A 、 B 兩地同時出發相向而行，兩人相遇在離 A 地 10 公里處；相遇後，兩人速度不變，繼續前進，分別到達 B 、 A 之後，立即返回，又相遇在離 B 地 3 公里處。試求： A 、 B 兩地的距離。

- (A) 24 公里 (B) 27 公里 (C) 30 公里 (D) 33 公里

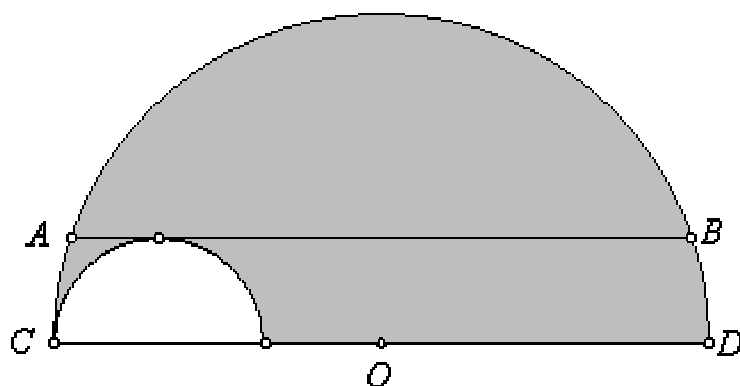
2、設集合 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ 。對於 S 的每個非空子集合 S_i ，定義它所有元素的和為 s_i ，那麼所有 s_i 的平均數是多少？

- (A) $\frac{2560}{93}$ (B) $\frac{266}{31}$ (C) $\frac{2560}{31}$ (D) $\frac{55}{3}$

3、設 x, y, z, t 滿足 $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 100$ ，則 $Q = \frac{x}{y} + \frac{z}{t}$ 的最小值為何？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$

4、如圖所示，有兩個半圓，大圓的弦 \overline{AB} 與小圓相切，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。已知 $\overline{AB} = 12$ ，則圖中陰影區域的面積為多少？



- (A) 12π (B) 15π (C) 18π (D) 24π

5、在長方形 $ABCD$ 中 C 點的坐標為 $(4, 4)$ ， A 點在位於第一象限之圓上移動，且 \overline{AB} 、 \overline{AD} 兩邊始終平行於 x 軸與 y 軸。設長方形 $ABCD$ 面積最小時， A 點的坐標為 (x, y) ，則 $x^2 + y^2$ 之值為何？

- (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7

6、設函數 $f(x) = |\cos x| + |\cos 2x|$ ， $x \in R$ ，則 $f(x)$ 的最小值是多少？

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7、一隻頑皮的猴子爬一個 10 階的梯子，它每次可以上爬 1 階、或上躍 2 階、或上躍 3 階。它從地面到最上面的一階，一共有多少種可能的方法？

- (A) 274 種 (B) 254 種 (C) 234 種 (D) 214 種

8、已知 $x^2 + bx + c$ 可整除多項式 $x^4 + 6x^2 + 25$ 及 $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ ，則 $b + c$ 之值為多少？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9、若實數 x 滿足 $\log_3 x = 1 - \cos \theta$ ，則 $|x - 1| + |x - 9|$ 之值為何？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

10、已知某四位數的前兩位數字與後兩位數字相同，順序也相同，則下列何數恆為此數的因數？

- (A) 111 (B) 101 (C) 31 (D) 11

11、設某不透明的袋子中裝有大小相同黃、紅、綠三種顏色的球各一個。現有一種遊戲是從此袋子中抽球，若抽出黃球則得 1 分，若抽出綠球則扣 1 分，若抽出紅球不得分也不扣分，每次抽完後要放回去。試問小華從袋子中抽三次球(每次僅抽一球)，總共得 -1 分的機率是多少？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{2}{9}$

12、若 x 是正數，且 $x \neq 4$ ， $x \neq \frac{1}{9}$ ，則 $\frac{4}{4-x} + \frac{9x}{9x-1}$ 的最小值是多少？

- (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{5}$ (C) $\frac{13}{7}$ (D) $\frac{7}{13}$

13、若拋物線 $y = x^2 + (a+1)x + b$ (其中 a, b 為固定的實數)，在 $x=3$ 時， $y=3$ ，且對任意的實數 x 恆滿足 $y \geq x$ ，則拋物線的頂點到原點的距離為多少？

- (A) $\frac{1}{4}\sqrt{221}$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{221}$ (C) $\frac{1}{4}\sqrt{211}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{211}$

14、設 a, b 是實數， x_1, x_2 是方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的兩個根，且 $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2$ ，則滿足前述所有條件的數對 (a, b) 共有多少組？

- (A) 1 組 (B) 2 組 (C) 3 組 (D) 4 組

15、設實數 x, y 滿足方程式 $x^2 + xy + y^2 = 3(95)^2 + (2006)^2$ ，則 $x + y = ?$

- (A) 160 (B) 170 (C) 180 (D) 190

16、設 P 為等腰直角三角形 ABC 斜邊 \overline{AB} 上的一點，若 $S = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ ，則下列四個選項中何者恆真？

- (A) $S = 2\overline{CP}^2$ (B) $S < 2\overline{CP}^2$
(C) $S > 2\overline{CP}^2$ (D) 無法確定 S 與 $2\overline{CP}^2$ 的關係

17、用 1, 2, 3, 4, 5 排出 120 個各位數均相異的五位數，將它們由小到大排列如下：

12345, 12354, 12435, …… , 54321
第 1 個 第 2 個 第 3 個 第 120 個

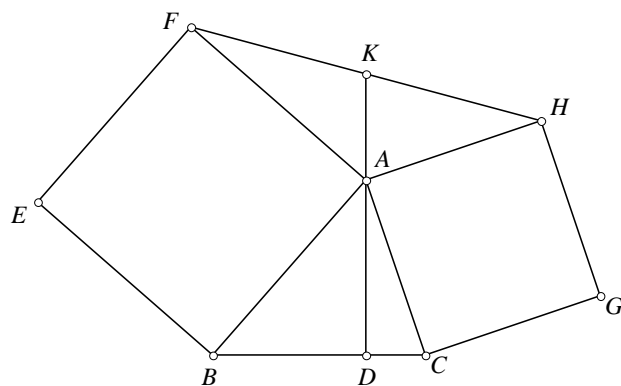
試問 34521 是排在第幾個？

- (A) 33 (B) 44 (C) 55 (D) 66

18、已知四面體 $PABC$ 的頂點 P 在底面的投影是 $\triangle ABC$ 的垂心， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{PB} = \overline{PC}$ ， $\overline{BC} = 2$ ，側面 PBC 與底面所夾的二面角為 60° ，則四面體 $PABC$ 的體積是多少？

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

19、如圖所示，從 $\triangle ABC$ 的兩邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 向外作正方形 $ABEF$ 、 $ACGH$ ， \overline{BC} 邊上高 \overline{AD} 的延長線交 \overline{FH} 於 K 點， $\overline{FH} = 10$ ，則 $\overline{FK} = ?$



- (A) $3\sqrt{5}$ (B) 5 (C) $2\sqrt{5}$ (D) 4

20、將一圓等分成 95 個扇形，並用紅、黃、藍三種顏色分別將各扇形塗色，且相鄰的扇形顏色不同。試問有多少種不同的塗色法？

- (A) $2^{95} - 2$ 種 (B) $2^{95} - 1$ 種 (C) $2^{95} + 1$ 種 (D) $2^{95} + 2$ 種

21、設 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，延長 \overline{AC} 到 D 點，使得 $\overline{CD} = \overline{BC}$ ， P 點是 $\triangle ABD$ 的內心，則 $\angle BPC = ?$

- (A) 105° (B) 135° (C) 145° (D) 155°

22、考慮使得 $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ 為一平方數的質數 p 。設 S 是所有這樣的質數 p 的總和，則 $S = ?$

- (A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 10

23、設 a, b 為正整數，且方程式 $x^2 + ax + 18 = 0$ 與 $x^2 - ax + b = 0$ 有一個共同的質數根，則 b 的最小值是多少？

- (A) -36 (B) -27 (C) -18 (D) -9

24、設對所有的正整數 n ， $a_n = \sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}$ ，則 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{997}} + \frac{1}{a_{999}} = ?$

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7

25、設 $\triangle ABC$ 三邊長 a, b, c 滿足 $bc = a^2 - 12a + 52$ ， $b + c = 8$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長是多少？

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18

基隆市 95 學年度市立高中國中部暨國民中學新聘教師聯合甄選「數學科」答案

一、單選題；每題 4 分，總分 100 分。

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	C	B	D	A	C	C	B
題號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	D	B	A	C	D	A	D	D	B	A
題號	21	22	23	24	25					
答案	C	D	A	C	B					

$$1. \text{ [國一] 假設兩地距離為 } x \text{ 公里。則 } \begin{cases} \frac{10}{\text{甲}} = \frac{x-10}{\text{乙}} \\ \frac{x+3}{\text{甲}} = \frac{2x-3}{\text{乙}} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{x+3} = \frac{x-10}{2x-3} \Rightarrow x = 27$$

$$2. \text{ [高二] 共有 } 2^{10}-1 \text{ 個非空集合，所有集合的總和是 } 1024 \times \frac{1}{2} \times 55 = 2560 \times 11$$

$$\text{故平均為 } \frac{2560 \times 11}{1023} = \frac{2560}{93}$$

$$3. \text{ [高一] 最小值發生在 } \frac{x}{y} = \frac{z}{t}, \text{ 按題目限制是 } \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$4. \text{ [國三] 陰影面積} = \pi \frac{R^2 - r^2}{2} = \pi \frac{(\frac{AB}{2})^2}{2} = 18\pi$$

5. [題目我看不懂] 不好意思。沒講圓半徑多大，實在不知道要怎麼做。

$$6. \text{ [高一] } f(x) = |\cos x| + |2\cos^2 x - 1|, \text{ 用表格會比較輕鬆}$$

x 範圍	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$ \cos x $	$1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 0$
$ 2\cos^2 x - 1 $	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$f(x)$	$2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 1$

7. [高二] 先找出 $x+2y+3z=10$ 大於等於 0 的整數解，再去排列。一樣用表格。

x	10	8	7	6	5	4	4	3	2	2	1	1	0	0
y	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	3	0	5	2
z	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	1	3	0	2
排列數	1	9	8	28	42	35	15	60	15	30	20	4	1	6

共 274 種

$$8. \text{ [高一] 輾轉相除法找出公因式為 } x^2 - 2x + 5, b+c=3$$

$$9. \text{ [高一] } x = 3^{1-\cos \theta} \geq 3^0 = 1, \text{ 所以 } x \text{ 會在 } 1, 9 \text{ 之間，所求就是 } 1, 9 \text{ 距離為 } 8$$

$$10. \text{ [國一] 送分題吧， } 1212 = 12 \times 101。$$

$$11. \text{ [國三] 符合的有一黃二綠，二紅一綠機率都 } \frac{1}{9}, \text{ 所以共 } \frac{2}{9}$$

$$12. \text{ [高一] 同第 3 題，當 } \frac{4}{4-x} = \frac{9x}{9x-1} \text{ 有最小值，而 } x = \pm \frac{2}{3} \text{ (負不合)，原式} = \frac{12}{5}$$

$$13. \text{ [高一] 這題比較難一點，隱含 } y = x \text{ 切拋物線於 } (3, 3),$$

$$\begin{cases} 3 = 3^2 + (a+1) \times 3 + b \\ \frac{dy}{dx}_{(3,3)} = 2x + a + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{拋物線 } y = x^2 - 5x + 9 \Rightarrow \text{頂點 } (\frac{5}{2}, \frac{11}{4})$$

$$\text{所求為 } \frac{\sqrt{221}}{4}$$

14. [高一]滿足三次和等於二次和等於一次和的數對有(1,1)(1,0)(0,1)所以 3 組

$$15. [\text{奇技淫巧}] x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 = 3 \times 95^2 + 2006^2 \Rightarrow x+y=190$$

16. [國二]設 D 為 \overline{AB} 中點，且不失一般性，令 P 在 A 、 D 之間。

$$S = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (\overline{AD} - \overline{DP})^2 + (\overline{BD} + \overline{DP})^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{PD}^2) = 2(\overline{CD}^2 + \overline{PD}^2) = 2\overline{CP}^2$$

17. [高二]3 開頭表示前面有 1,2 開頭共 48 個。

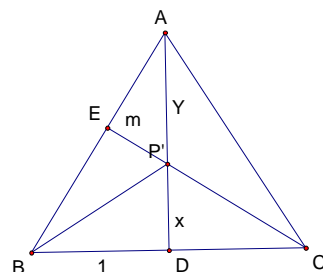
34 開頭表示前面有 31,32 開頭共 12 個，

345 開頭表示前面有 341,342 開頭共 4 個，

而 34521 前面有 34512 故為第 66 個

18. [高二]令 P' 為 P 的投影到 ABC 平面上的點，並為三角形

$$ABC \text{ 的垂心。則所求體積為 } \frac{\sqrt{3}x(x+y)}{3}$$



$$\overline{AP'} \times \overline{P'D} = \overline{EP'} \times \overline{P'C} \quad (\text{圓內幕}) \Rightarrow \sin \angle BAD = \frac{m}{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin \angle P'BD$$

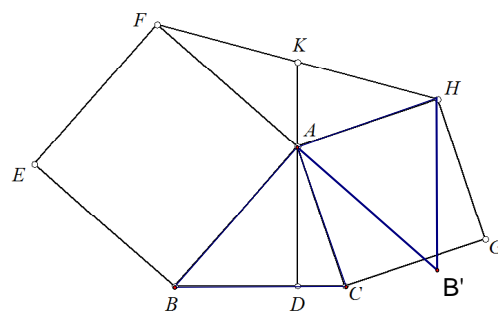
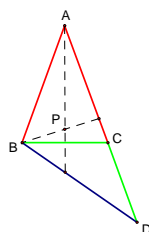
$$\Rightarrow \triangle BP'D \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x+y} \Rightarrow x(x+y)=1 \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

19. [困難的國三]將 B 點以 A 為軸，逆時針旋轉 90 度到

B' 。則易得 $\triangle ABC \cong \triangle AB'H$ 。且 \overline{AK} 平

行 $\overline{B'H}$ 。

$$\text{又 } \overline{AF} = \overline{AB'} \Rightarrow \overline{FK} = \overline{KH} = \frac{1}{2} \overline{FH} = 5$$



20. [高二]但是我始終不會，用背的。

21. [國三] $\angle ABD = 105^\circ$ ， $\angle PBC = 17.5^\circ$

$$\angle BPC = 145^\circ$$

$$22. [\text{高一}] \text{令 } \frac{2^{p-1}-1}{p} = n^2, 2^{p-1} = pn^2 + 1$$

所以 p, n 皆為奇數，令 $n=2k+1$ ， $2^{p-1} = p(4k^2 + 4k + 1) + 1 = 4p(k^2 + k) + p + 1$

顯然 p 為 $4m+3$ 型質數，從 3,7,11,19,23，只有 3,7 符合條件，故 $S=10$

23. [國二]兩方程式相加 $2x^2 = -b - 18$ ，若此質數根為 2，則 $b = -26$ ，若此根為 3，則

$b = -36$ 。但是很好笑的矛盾。題目說是正整數...

24. [高一]看起來嚇人的分項對消法， $\frac{1}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{2}$ ，原式 = $\frac{\sqrt[3]{999+1} - \sqrt[3]{1-1}}{2} = 5$

25. [國三]將 $b = 8 - c$ 代入， $(8 - c)c = a^2 - 12a + 52 \Rightarrow (a - 6)^2 + (c - 4)^2 = 0$
 $\Rightarrow a = 6, b = c = 4$ ，周長 14。