

貳、數學專業科目

選擇題：（共 30 題，每題 2 分，計 60 分）

41. $53^{39} \times 39^{53}$ 的個位數字是多少？

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9

42. $0.\overline{6} + 0.\overline{234} =$

(A) $0.\overline{834}$ (B) $0.\overline{9}$ (C) $0.\overline{99}$ (D) $0.\overline{900}$

43. 下列那對整數互質

(A) (854321, 8543) (B) (654321, 6543)

(C) (654321, 654) (D) (654321, 54)

44. 下列那一個不等式成立

(A) $1 < \sqrt[3]{64 + \sqrt{5}} < 2$ (B) $2 < \sqrt[3]{64 + \sqrt{5}} < 3$

(C) $3 < \sqrt[3]{64 + \sqrt{5}} < 4$ (D) $4 < \sqrt[3]{64 + \sqrt{5}} < 5$

45. 若 $f\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \frac{1+x}{1-x}$ ，則 $f\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 3 (D) 5

46. 下列何者滿足 $|x-2| + |x-5| = 3$

(A) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (C) $\sqrt{2}+5$ (D) $3+\sqrt{5}$

47. 若 $n = 253 \times 81 - 2 \times 11$ ，則 n 除以 9 的餘數為

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

48. 下列各函數的定義域 S ，何者錯誤？

(A) $y = \frac{1}{2x-3}$ ， $S: \left\{x \mid x \neq \frac{3}{2}\right\}$ (B) $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{2x-3}$ ，

$S: \left\{x \mid x > \frac{3}{2}\right\}$ (C) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ， $S: \{x \mid x > 1\}$

(D) $y = \frac{1}{\sqrt{|2x-3|+3x-4}}$ ， $S: \{x \mid x > 1\}$

49. $a > 0$ ， $b > 0$ ，下列何式不成立？

(A) $\sqrt{a}\sqrt{-b} = \sqrt{abi}$ (B) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}i$ (C) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}i$

(D) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

50. 因式分解 $2x^2 - xy - y^2 + x + 2y - 1$ 的結果為何？

(A) $(2x-y)(x+y-1)$ (B) $(x+y+1)(2x-y-1)$

(C) $(2x+3y-1)(x-2y+1)$ (D) $(2x+y-1)(x-y+1)$

51. 如右圖所示，大正方形 $ABCD$ 是由四

個相同的直角三角形及一個正方形

$EFGH$ 所拼成；而正方形 $EFGH$ 亦

是由四個相同的直角三角形及一個

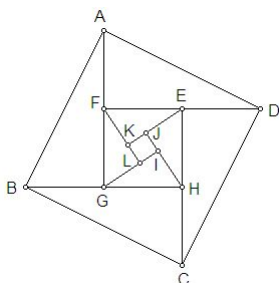
小正方形 $IJKL$ 拼成。若小正方形

$IJKL$ 面積為 1， $\overline{EJ} = 3$ ， $\overline{AF} = 5$ ，則 \overline{AC} 的長會落在

下列哪一個範圍內？

(A) $13 < \overline{AC} < 14$ (B) $14 < \overline{AC} < 15$ (C) $15 < \overline{AC} < 16$

(D) $16 < \overline{AC} < 17$



52. 下列敘述何者錯誤？

(A) 圓內接四邊形，以正方形的面積最大 (B) 圓內接四邊形，以正方形的周長最小 (C) 四邊等長的四邊形，當此四邊形為正方形時面積最大 (D) 面積定值的四邊形，當此四邊形為正方形時周長最小

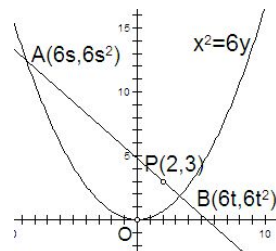
53. 直角坐標上， O 為原點，過點 $P(2, 3)$

作一直線交拋物線 $x^2 = 6y$ 於 A 、 B

兩點。若 $\angle AOB$ 為直角，則直線 AB

的斜率為何？

(A) -1 (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{5}{4}$ (D) $-\frac{9}{8}$



54. 解方程式 $8^x + 8^{-x} + 3(2^x + 2^{-x}) = 8$ ，其所有根的和是多少？

(A) 10 (B) 8 (C) 2 (D) 0

55. 正三角形 ABC 的面積為 $15\sqrt{5}$ ，若 H 為外心，則 $\triangle HBC$ 的面積為

(A) $10\sqrt{5}$ (B) $5\sqrt{5}$ (C) $5\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{15}$

56. 坐標平面上，四點 $A(-2, 5)$ ， $B(4, 1)$ ， $C(4, -3)$ ， $D(-2, -7)$ ，兩點 A 、 B 決定直線 ℓ_1 ，兩點 C 、 D 決定直線 ℓ_2 ，若 θ 為 ℓ_1 與 ℓ_2 的交角，則 $\theta =$

(A) $\sin^{-1} \frac{12}{13}$ ， $\cos^{-1} \frac{5}{13}$ (B) $\sin^{-1} \frac{12}{13}$ ， $\cos^{-1} \frac{-5}{13}$

(C) $\sin^{-1} \frac{-12}{13}$ ， $\cos^{-1} \frac{5}{13}$ (D) $\sin^{-1} \frac{-12}{13}$ ， $\cos^{-1} \frac{-5}{13}$

57. (承接上題(56)) 線段 AB 在 ℓ_2 上的投影長為

(A) $\frac{10}{\sqrt{13}}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{13}$ (C) $\frac{10}{13}$ (D) $\sqrt{\frac{10}{13}}$

58. 設圓 O 的半徑為 r ，若正方形 $ABCD$ 內接於圓 O ，則正方形 $ABCD$ 的一邊長為

(A) $\frac{r}{2}$ (B) $2r$ (C) $\frac{r}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{2}r$

59. 該題玩法是以 1~4 四個數字，把大正方形裡的空格子填滿。而規則就只有一個：1~4 的數字在每一直行、每一橫列，以及每個小四宮格裡，都只能出現一次。將所有空格填滿時，空格甲應填入多少？

1			4
		1	
4			甲
	3		

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

60. 正方形 $ABCD$ 的一邊長為 8，且對稱中心為 O ，設點 P 與 O 的距離 $OP = 3$ ，若以 P 為圓心， r 為半徑做一圓 C ，使圓 C 在正方形 $ABCD$ 的內部，則下列何者可為 r 值

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

61. 若 m 為下列數據的算術平均數：18, 19, 14, 17, 16, 18, 15, 19, 22, 21, 19, 18, 21, 16, 18, 19, 23, 17, 20, 20，則 $m = ?$

(A) 17 (B) 17.5 (C) 18 (D) 18.5

62. 已知一大批某種產品中有 30% 的一級品，現從中隨機抽 5 個樣品，那麼 5 個樣品中至少有兩個一級品的機率為

(A) 0.163 (B) 0.309 (C) 0.472 (D) 0.781

63. 空間坐標系，若三點 $A(1, 3, -2)$ ， $B(1, 1, 2)$ ， $C(2, 2, 3)$ 決定平面 E ，則下列何者為 E 的法向量

(A) $(1, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3})$ (B) $(3, 2, -1)$ (C) $(3, -2, 1)$

(D) $(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2})$

64. (承接上題(63)) 點 $P(1, 2, 3)$ 與平面 E 的距離為

(A) $\frac{\sqrt{14}}{3}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{14}}$ (C) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{355}}$ (D) $\frac{\sqrt{355}}{\sqrt{14}}$

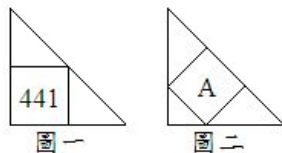
65. 巴斯卡是一位著名的科學家，在他出生後經過年歲三分之一少 1 歲的那年，以直線與圓形創造了數學。經過了 4 年，發表了「圓錐論」。而他創造了微積分機的年齡正是他年歲少 1 的一半。再經過 4 年，以空氣重力的證明推翻了古物理學重大的錯誤。在剩餘的 16 年轉入更崇高的研討工作。那巴斯卡幾歲以直線與圓形創造了數學？

(A) 11 (B) 12 (C) 18 (D) 19

66. $a = 45$ 、 $b = 15$ ，則 $a^3 - b^3 - a(a^2 - b^2) + b(a - b)^2 = ?$

(A) 0 (B) 900 (C) 13500 (D) 20250

67. 在一已知等腰直角三角形中作內接正方形可以有兩種方法。如右圖所示，如果依圖一的方法所得到的



正方形的面積是 441，那麼依照圖二的方法在同一等腰直角三角形裡所做的內接正方形的面積 A 是多少？

(A) 441 (B) 196 (C) 245 (D) 392

68. 線段 PQ 與線段 QR 將 R 區與 H 區分割兩區，現在若要通過 P 點畫一直線分割這兩區域，卻又保持原面積，

下列哪一種作法是可以的？

(A) 連接 P 與 \overline{QR} 中點的直線

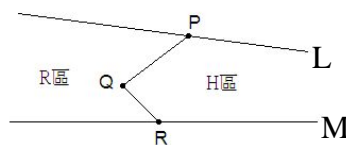
(B) 延長 PQ 的連線 (C) 過 Q 點

作平行 \overline{PR} 交下方於 T 點，連接

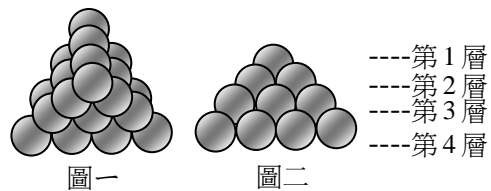
PT 兩點 (D) 作直線 PR ，在 R 點上取一點 P' (異於

P ，且 $\overline{PR} = \overline{P'R}$)，連接 $\overline{QP'}$ 交直線 M 於 S 點，連

接 PS 兩點



69. 大小相同的圓球，每三個相鄰的圓球可往上堆一個圓球，由數個圓球的堆積，可堆

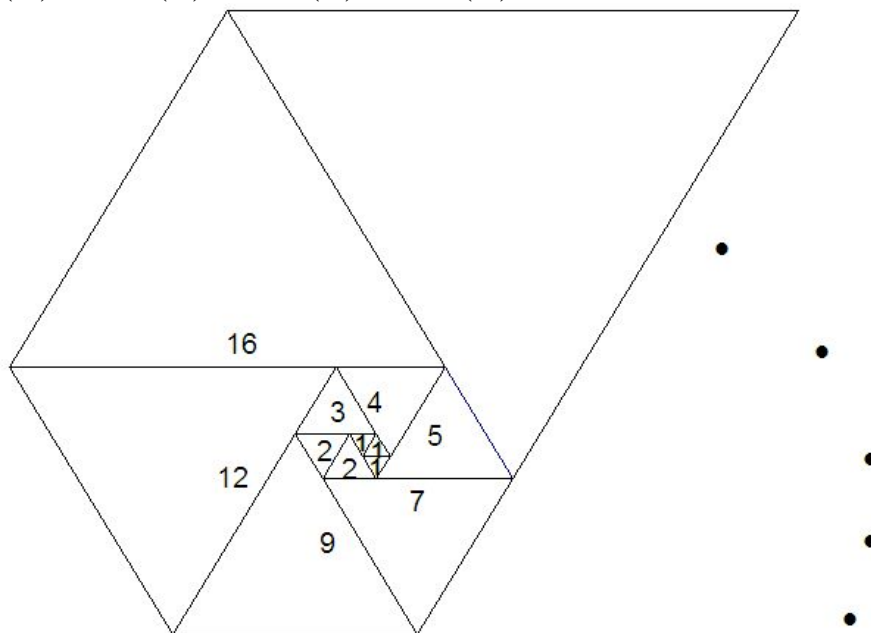


成一立體圖形。圖一是由上往下看(鳥瞰圖)的情形；圖二則是側面看到的情形。請問當排到第 20 層時，共用了幾個圓球？

(A) 3080 (B) 1540 (C) 875 (D) 625

70. 右圖中每一個都是正三角形，排列方式是：第 1、2、3 個邊長為 1，第 4、5 個邊長為 2，第 6 個邊長為 3，以螺旋方式緊密排列。根據右圖及上述，試問前 300 個正三角形共有幾個的邊長是奇數？

(A) 166 (B) 168 (C) 170 (D) 172



41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
B	D	A	D	D	B	B	C	B	D
51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
C	B	B	D	B	B	A	D	C	C
61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
D	C	A	B	B	D	D	C	B	D

備註：第 70 題答案需詢問原出題者確認。

答案補充說明：

95 台北市

1. [國一]用同模的概念去解， $53^{39} \times 39^{53} \equiv 7 \times 9 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$
2. [國一] $0.\overline{6} + 0.\overline{234} = 0.\overline{666} + 0.\overline{234} = 0.\overline{900}$
3. [國一]用輾轉相除法，或是看出(B)(C)(D)都有公因數 3。
4. [國一] $\sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{64 + \sqrt{5}} > 4$
5. [高一]我喜歡讓 $\frac{2x-1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2x-1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5$
6. [國一]滿足等式的狀況，表 $2 \leq x \leq 5$ ，符合的是(B)
7. [國一]類似第 1 題， $253 \times 81 - 2 \times 11 \equiv -22 \pmod{9} \equiv 5 \pmod{9}$
8. [高一](C)少了 $x < -1$ 。
9. [高一]還是考 i 的老梗，(B)應為 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}i$
10. [國二]雙十字交乘法，(D)
11. [國二]耐心用畢氏定理慢慢做，可得 $\overline{AC} = 5\sqrt{10} \doteq 15.5$
12. [國二](B)應該是周長最大。
13. [高二]因為 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1 \Rightarrow st = -1$ ，而斜率為 $\frac{6s^2 - 6t^2}{6s - 6t} = s + t$
又 $\frac{6s^2 - 3}{3 - 6t^2} = \frac{6s - 2}{2 - 6t} \Rightarrow s + t = -\frac{3}{2}$
14. [高一]老梗題，令 $t = 2^x + 2^{-x} \Rightarrow 8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t \Rightarrow t^3 - 3t + 3t = 8 \Rightarrow t = 2$
 $x = 0$
15. [國三]正三角形內心外心重心垂心都重合，所求為原三角形面積的三分之一
16. [高二] $\begin{cases} \overline{AB}: 2x + 3y = 11 \\ \overline{CD}: 2x - 3y = 17 \end{cases}$ 交於 $E(7, -1)$ ， $\overrightarrow{BE} = (-3, 2)$ ， $\overrightarrow{CE} = (-3, -2)$
 $\cos \theta = \pm \frac{5}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \pm \frac{5}{13}$ ， $\sin \theta = \frac{12}{13}$ 理論上(A)(B)應該都可以，不知道當年的釋疑如何說的。
17. [高一]投影長 $= |\overline{AB} \cos \theta| = \frac{10}{\sqrt{13}}$
18. [國三]正方形對角線為圓的直徑 $= 2r$ ，邊長 $= \sqrt{2}r$
19. [數獨?!]會玩就秒殺，甲 $= 3$

20. [國三]換句話說， $r + \overline{OP} < 4$ ， $r < 1$ ，只有(C)符合
21. [國小]送分題，仔細算就得到 18.5。
22. [高二]排榕原理， $1 - \frac{C_5^{7n}}{C_5^{10n}} - \frac{C_4^{7n} C_1^{3n}}{C_5^{10n}} \doteq 0.47178$
23. [高二]先找出 $\overrightarrow{AB} = (0, -2, 4)$ 、 $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 1)$ ，再用外積得到法向量(3, -2, -1)
24. [高二]E: $3(x-1) - 2(y-1) - (z-2) = 0$ ， $d(P, E) = \frac{|0 - 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$
25. [國一]設一生為 x 歲， $\frac{x-1}{2} + 4 + 16 = x$, $x = 39$, $\frac{x}{3} - 1 = 12$
26. [國二]原式 $= (a-b)[(a^2 + ab + b^2) - a(a+b) + b(a-b)]$
 $= (a-b)ab = 45 \times 15 \times 30 = 20250$
27. [國二]台北市很愛這題，愛到今年又出一次，一個是四分之一，一個是九分之二。換算可以得到 392。
28. [國二]我那個年代會考的尺規作圖，利用等底同高的概念，(C)是答案。
29. [高一]堆垛題，化為 $\sum_{n=1}^{20} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{20 \times 21 \times 22}{6} = 1540$
30. [高一](奇奇奇偶偶奇偶)七個裡面會有四個奇數，所以三百個就 $43 \times 4 = 172$ 。