臺南縣 95 學年度公立國民中學教師聯合甄選試題卷　＜數學＞

說明：
一、請先核對答案卡上號碼與准考證號碼是否相同，考試科目是否正確，若用錯答案卡作答則不予計分。
二、本試卷題本採雙面印刷，共 7 頁有 100 題選擇題，測驗時間從 10:00 到 11:40 共 100 分鐘。
三、請依照題意從四個選項中選出一個正確或最佳的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡上相應的位置畫記，請務必將選項塗黑、塗滿。未依答案卡上注意事項劃記，以致光學閱讀機無法正確閱讀，其後果由應考人自行負責，不得提出異議。

第一部分：數學

1. $f(x)$ 為一線性函數，滿足 $f(1)\le f(2)$，$f(3)\ge f(4)$ 和 $f(5)=5$。試問下列敘述何者為真？
(A) $f(0)<0$
(B) $f(0)=0$
(C) $f(1)<f(0)<f(-1)$
(D) $f(0)=5$

2. 已知 x、y、z 皆為正整數，且 $(x,y,z)=1$，若 $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$，則 $x+y+z=$？
(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9

3. $\dfrac{(3!)!}{3!}=$？
(A) 2
(B) 6
(C) 40
(D) 120

4. 已知一長方體之所有稜長和為 140，又知任一頂點到最遠的另一頂點的距離為 21，則其表面積為何？
(A)776
(B)784
(C)798
(D)812

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=$？
(A) 1
(B) $\dfrac{1}{2}$
(C) 0
(D)不存在

6. 若 $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{\cdots\cdots}}}}$，則 $f'(x)=$？
(A) $\dfrac{2}{2f(x)-1}$
(B) $\dfrac{2}{2f(x)+1}$
(C) $\dfrac{2}{f(x)-1}$
(D) $\dfrac{1}{f(x)+1}$

7. 下列敘述何者正確？
(A)若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 連續，則 $f'(\alpha)$ 存在
(B)若 $f'(c)=0$，則 $f(c)$ 為局部極值(local extrema)
(C)若 $f''(c)=0$，則點 $(c,f(c))$ 為曲線 $y=f(x)$ 之一反曲點
(D)若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為遞增函數，則曲線 $y=f(x)$ 的圖形在區間 (a,b) 為凹口向上型(concave up)

8. 若 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^4(2+x)^2}$，則 $f'(1)=$？
(A) $-\dfrac{2}{9}$
(B) 0
(C) $\dfrac{2}{9}$
(D) $\dfrac{2}{7}$

9. 曲線 $y^2-xy-3x=1$ 在點 $(0,-1)$ 之切線斜率為何？
(A) -2
(B) -1
(C) 1
(D) 2

10. 若 $f'(x)=2x+\sin x$ 對任意實數 x 皆成立，且 $f(0)=2$，則 $f(\pi)=$？
(A) π^2
(B) π^2+1
(C) π^2+2
(D) π^2+4

11. 化簡 $\dfrac{1}{\log_2 100!}+\dfrac{1}{\log_3 100!}+\dfrac{1}{\log_4 100!}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{100} 100!}$
(A) 0.01
(B) 0.1
(C) 1
(D) 10

12. 若 $x^2+y^2=14x+6y+6$，則 $3x+4y$ 之最大值為何？
(A) 75
(B) 74
(C) 73
(D) 72

13. 一個正六邊形與一個正三角形有相同的面積，請問此正三角形的邊長對此正六邊形的邊長比值為多少？
(A) $\sqrt{6}$
(B) 2
(C) $\sqrt{3}$
(D) $\sqrt{2}$

14. △ABC 中,已知 $3\sin A+4\cos B=6$ 及 $4\sin B+3\cos A=1$，則 $\angle C$ 之度數為何？
(A) 30°
(B) 60°
(C) 75°
(D) 120°

15. 已知直線 $y=3x-1$ 與拋物線 $y=x^2-3x+k$ 相交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=4\sqrt{5}$，則 $k=$？
(A) $\dfrac{15}{2}$
(B) 3
(C) $\dfrac{24}{5}$
(D) 6

16.設 P 為雙曲線 $16(y-1)^2-9(x+1)^2=144$ 在第一象限內一點，又 P 到該雙曲線兩焦點 F_1、F_2 的比為 1：3，則△PF_1F_2 的周長為何？
(A) 26
(B) 24
(C) 22
(D) 20

17.已知多項式 $y=f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的圖形與 x 軸有五個相異的交點，其中一個是 $(0,0)$，試問下列何數必不為 0？
(A) b
(B) c
(C) d
(D) e

18.數列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{5}{1}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{7}{1}$，…，依此規則，第 51 項為多少？
(A)$\frac{13}{7}$
(B)$\frac{15}{7}$
(C)$\frac{13}{9}$
(D)$\frac{11}{9}$

19.設函數 $f(x)=x^4+x^2+1$，若 $f(\frac{1+i}{\sqrt{2}})=a+bi$，求 $a+b=$？
(A) 0
(B) 1
(C)-1
(D) 2

20.若 $P(x,y,z)$是平面 $3x-4y+12z=8$ 上之動點，則$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$之最小值為何？
(A) 13
(B) 11
(C) 9
(D) 7

21.對方程式 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=2a$ 之圖形而言，下列何者為真？
(A)若 $a>5$， 則其圖形表一圓
(B)若 $a<5$，則無圖形
(C)若 $a=5$，表一線段
(D)若 $a=3$，表一橢圓

22.設 z_1 與 z_2 為方程式 $z^2=-15+8i$ 之二根，則下列何者為真？
(A) z_1 與 z_2 互為共軛複數
(B) $|z_1|=|z_2|=\sqrt{17}$
(C) $z_1\times z_2=-15$
(D) $z_1+z_2=8i$

23.對於數列與級數，下面四個同學的敘述之中，你認為哪一位是正確的？
甲說：“由於 5－5＝0，
5－5＋5＝5，
5－5＋5－5＝0，
5－5＋5－5＋5＝5，…；
所以我認為 5－5＋5－5＋5－5＋…＝0 或 5”。
乙說：“我認為甲說的不對，5－5＋5－5＋5－5＋5－…，此級數的和應該是 5 與 0 的平均值，即 $\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2}$”。
丙說：“$1+(-\frac{3}{2})+(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{3}{2})^3+\ldots=\frac{1}{1-(-\frac{3}{2})}$”。
丁說：“$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots$是一個收斂級數”。
(A)甲
(B)乙
(C)丙
(D)丁

24.$A=\{x\,|\,x\in\mathbf{Z},\ -10\le x\le 10\}$，$B=\{x\,|\,\frac{(x-1)^2(x-5)^3}{(x-3)^7(x-9)^5}\ge 0\}\Rightarrow$ $A\cap B$ 有幾個元素？
(A) 3
(B) 4
(C)18
(D)19

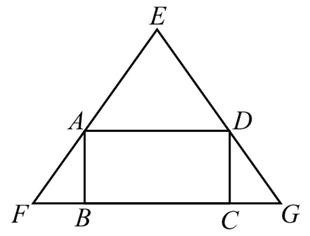
25.在△ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 之三邊長 a，b，c 滿足 $2(a+b-c)=3(\sin A+\sin B-\sin C)$，則此三角形的外接圓半徑 $R=$？
(A)$\frac{3}{2}$
(B)$\frac{2}{3}$
(C) 1
(D)$\frac{3}{4}$

26.點 $P(a,b)$是橢圓 Γ：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 和拋物線 Γ'：$y^2=-4x$ 的一個交點，則下列哪些點也是 Γ 和 Γ'的交點？
(A) $(-a,b)$
(B) $(a,-b)$
(C) $(-a,-b)$
(D) (b,a)

27.選出正確者？
(A)級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 收斂
(B)級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}$ 收斂
(C)若 $-5\le x\le 5$，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{5})^n$ 收斂
(D)若 $-5<x\le 5$，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{5})^n$ 收斂

28.設自然數 $n\ge 3$，且$(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\ldots+(1-x)^n$ 的展開式中 x^2 項係數可表為 an^3+bn^2+cn+d，則下列何者為真？
(A) $a=1$，$d=b+c$
(B) $a+c=b+d$
(C) $a=c$
(D) $a=3$，$b=0$

29.三角形 EFG 之底為 b，高為 h；長方形 $ABCD$ 中，$\overline{BC}=2\overline{CD}$，則 $\overline{CD}=$？



(A) $\dfrac{h}{2}$

(B) $\dfrac{b}{2}$

(C) $\dfrac{bh}{h+b}$

(D) $\dfrac{bh}{2h+b}$

30.設 P_1 表示丟 2 個公正硬幣時，恰好出現 1 個正面的機率；P_2 表示擲 2 個均勻骰子，恰好出現 1 個偶數點的機率；P_3 表示丟 4 個公正硬幣時，恰好出現 2 個正面的機率。試問下列選項何者為真？

(A)$P_1=P_2=P_3$

(B)$P_1=P_2>P_3$

(C)$P_1=P_3<P_2$

(D)$P_1=P_3>P_2$

31.設 $S_n=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\ldots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=$？

(A) 2

(B) 1

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) $\dfrac{1}{6}$

32.袋中有六個乒乓球，分別編號為 1，2，3，4，5，6。每次自袋中隨機抽取一球，然後將袋中編號為該球號碼之因數或倍數者一併自袋中取出（例如第一次抽中 2 號球，則將 1 號、2 號、4 號、6 號四球皆取出），再進行下一次的抽取。試問最後一次抽取時，袋中只剩 5 號球的機率是多少？

(A) $\dfrac{7}{18}$

(B) $\dfrac{9}{18}$

(C) $\dfrac{11}{18}$

(D) $\dfrac{13}{18}$

33.從前有一個犯人被判了死罪．在執行前，仁慈的國王給予他一個機會，其辦法如下：

(1)令犯人將 10 個白球和 10 個黑球任意放入 A，B 兩個袋中,每一個袋子內至少放入 1 個球,但是 20 個球全放完。

(2)叫人將兩個袋子隨意調換位置，使犯人認不出原來袋子的位置。

(3)令犯人從 A，B 袋中任選一袋而後從此袋中任意抽出 1 個球來。

(4)若抽到的是白球，便可立即獲釋；若是黑球則執行死刑。

試問犯人如何分配黑白球於袋內時，活命的機會最大？

(A)A 袋放入 10 個白球，B 袋放入 10 個黑球

(B)A 袋白球黑球各放 5 個，B 袋也是白球黑球各放 5 個

(C)A 袋放入白球 1 個，B 袋放入餘下的白球 9 個和黑球 10 個

(D)A 袋放入黑球 1 個，B 袋放入白球 10 個和餘下的黑球 9 個

34.某一工廠生產燈泡，12 個裝成一盒。工廠品質檢驗的方法是從每盒中任取 4 個來檢查，如有兩個或兩個以上的燈泡是壞的，則整盒淘汰。若某一盒有 5 個壞燈泡，則這一盒會被淘汰的機率為何？

(A) $\dfrac{19}{33}$

(B) $\dfrac{14}{55}$

(C) $\dfrac{70}{99}$

(D) $\dfrac{21}{55}$

35.滿足 $1+3^y=2^x$ 的非負整數解 (x,y) 共有幾組？

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D)以上皆非

36.設 $f(x)$ 為 $x^{100}+1$ 除以 x^3+x^2+x 的餘式，若 $g(x)=20f(x)-14$，$g(100)$ 除以 7 的餘數為 R

試問：$R=$？

(A) 6

(B) 5

(C) 4

(D) 3

37.數列 $\langle a_n\rangle$ 定義為 $a_1=2$，$a_2=1$，$\dfrac{2}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{a_{n+1}}$，$n\geq 2$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

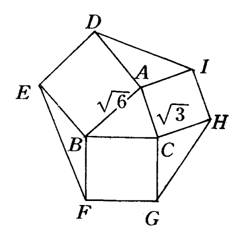
38.如圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=\sqrt{3}$ 各邊外側作三個正方形 $ADEB$, $BFGC$, $CHIA$，則六角形 $DEFGHI$ 之面積的最大值＝？

(A) 16

(B) 18

(C) 20

(D) 25



39.設 $a>0$，$0\leq x<2\pi$，若函數 $y=\cos^2 x-a\cos x+b$ 之最大值為 0，最小值為 -4，則 a,b 之乘積＝？

(A) -3

(B) -4

(C) -5

(D) -6

40.高為 32、底面積為 128π（圓周率＝π）的圓錐容器所能容納之最大球的半徑為 t，則 t 為下列何者？

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

41.設 x 的四次方程式 $x^4+2\sqrt{3}(\log_2 k)x^2+1-(\log_2 k)^2=0$ 有四個相異實根，則實數 k 可為下列何值？

(A) 0.3
(B) 0.4
(C) 0.5
(D) 0.6

42.設矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，若

$A-A^2+A^3-A^4+A^5-A^6+\cdots\cdots+A^{99}-A^{100}+A^{101}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

，則 $a+b+c+d$ ＝？

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

43.已知三次多項式 $f(x)=3x^3+10x^2+7x-1$ 滿足

$f(a)=f(b)=f(c)=0$， 則行列式 $\begin{vmatrix}a+b & c & c\\ a & b+c & a\\ b & b & c+a\end{vmatrix}$ 之值為下列何者？

(A) $\frac{4}{3}$
(B) 2
(C) $\frac{8}{3}$
(D) 3

44.設△ABC 內部三點 P、Q、R 滿足 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QP}$，$\overrightarrow{BR}=2\overrightarrow{RQ}$，$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PR}$，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{x}{19}\overrightarrow{AC}+\frac{y}{19}\overrightarrow{AB}$，試問：下列何者正確？

(A) $x=9$，$y=6$
(B) $x=12$，$y=8$
(C) $x=15$，$y=10$
(D) $x=18$，$y=12$

45.設 $A(-9,7,-4)$，$B(5,-2,3)$，$C(1,2,3)$，$D(a,b,6)$ 為空間中共面四點，且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，試問：下列哪些選項是正確的？

(A) $2<a<3$ ， $7<b<8$
(B) $3<a<4$ ， $8<b<9$
(C) $4<a<5$ ， $9<b<10$
(D) $5<a<6$ ， $10<b<11$

46.若將一邊長為 2 的正方形盒子平置於 xy 平面上，使其一頂點與坐標原點重合，則坐標為(2，2，2)的頂點恰在一斜平面上。此斜平面與三坐標軸平面所圍成的四面體體積最小為 t，則 t 為下列何者？

(A) 34
(B) 35
(C) 36
(D) 37

47.設△ABC 之三個頂點 A、B、C 對應的複數分別為 z_1、z_2、z_3，已知 $|z_1|=5$，$z_2=\overline{z_1}$，$z_3=\frac{1}{z_1}$，試問：△ABC 之面積的最大值為下列何者？

(A) 12
(B) 13
(C) 15
(D) 17

48.試問：方程式 $\Gamma:13x^2-18xy+37y^2+2x+14y-2=0$ 之圖形為下列何者？

(A) 橢圓
(B) 雙曲線
(C) 相交之二直線
(D) 拋物線

49.設三個相異平面 $E_1:x+2y+3z=kx$，$E_2:x+2y+3z=ky$，$E_3:x+2y+3z=kz$，相交於一直線，試問：$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+3zx}$ 之值為下列何者？

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 1
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 2

50.設一數 $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$，$S=\{z,z^2,z^3,\cdots\cdots,z^{100}\}$，今自 S 中任取一數，若此數恰為實數的機率為 $\frac{q}{p}$ (其中 p,q 互質)，則 $p+q$ ＝？

(A) 28
(B) 29
(C) 30
(D) 31

臺南縣 95 學年度公立國民中學教師聯合甄選答案<數學>									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	B	B	A	D	C	B	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	A	A	D	C	C	D	B	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	D	B	D	B	B	B	D	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	A	C	A	B	C	A	B	D	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	C	A	A	D	C	A	A	A	B

95 台南縣略解

1. [國一]線性函數表為一直線，按題意要求，所以 $f(x)$ 為常數函數，即 $f(x)=5$
2. [高一] $5^x\times2^y=200^z=2^{3z}\times5^{2z}$
$\Rightarrow x=2z,y=3z,z=z$ 又(x,y,z)=1，只能選(2,3,1)。
3. [高一] $\frac{6!}{3!}=120$
4. [國二]設三稜長為 a,b,c，由題意可得
$$\begin{cases}4(a+b+c)=140\\a^2+b^2+c^2=441\end{cases}$$
表面積＝ $2(ab+bc+ca)=1225-441=784$
5. [微積分－極限]原式＝ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}[x-(x-1)]}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$
6. [微積分]老梗題，可得 $f(x)=\sqrt{2x+f(x)}$
$[f(x)]^2=2x+f(x)$ 兩邊同時微分
$2f(x)f'(x)=2+f'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{2f(x)-1}$
7. [微積分](A)反例，絕對值函數；(B)f(x)也有可能是常數函數，無所謂極值。(C)理由同(B)
8. [微積分－極限應用]會約掉(x-1)，故
$f'(1)=\frac{(1-2)(1-3)}{1^4(2+1)^2}=\frac{2}{9}$
9. [微積分－微分應用] $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{-y-3}{2y-x}$ 用 $(0,-1)$ 代入，可得－1
10. [微積分－積分應用]可令 $f(x)=x^2-\cos x+C$ ，利用 $f(0)=2\Rightarrow C=3\Rightarrow f(\pi)=\pi^2+4$
11. [高一]看起來很嚇人的算式，其實利用換底公式
會變成 $\frac{\log 2\times3\times4\times...\times100}{\log 100!}=1$
12. [高二]先配成圓的形式，$(x-7)^2+(y-3)^2=8^2$
圓上的點 $(7+8\cos\theta,3+8\sin\theta)$
$3x+4y=33+24\cos\theta+32\sin\theta$
$=33+40\cos(\theta+\phi)\le73$
13. [國二]正六邊形可以切成六個小正三角形。故正三角形與六邊形切出來的小正三角形面積比為 6，邊長比就開根號。
14. [高一]兩式平方後再相加可得 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}=\sin C$，故選項中只有出現 $\angle C=30°$
15. [高二]在 $y=3x-1$ 上面，x 每相差 1，長度就相差 $\sqrt{10}$
而 $\overline{PQ}=4\sqrt{5}\Rightarrow|\alpha-\beta|=\sqrt{8}$ (α、β 為 P,Q 的 x 座標)
而兩方程相減之後，可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=6\\\alpha\beta=k+1\end{cases}$
$4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=28\Rightarrow k=6$
16. [高二]化為標準型：$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$
$a=3,b=4,c=5$
根據定義，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ 又 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3=a:3a$
故所求周長＝ $4a+2c=22$
17. [高一]有五相異根，表示沒有重根，故 d 不能為 0
18. [國二]分類原則是同一組的分子分母會加成完全平方數，且同一個分數上下相加也會相同，規律是 1 個,2 個,3 個…。到 45 個時，分子分母相加為 18，再來就是分子分母相加為 20，分子會是 1,3,5,7,9,11。所以就 $\frac{11}{9}$。
19. [高一]直接代比較省事，求出 a=0,b=1。
20. [高一]反過來看，也可以說是(1,-2,3)到平面的距離平方。
$$d=\frac{|3+8+36-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}=\frac{39}{13}\Rightarrow d^2=9$$
21. [高二]定義題，兩焦點距離為 5，所以當 2a>5 時，就會是橢圓。
22. [高一](A)應為相反數(C)應為 15-8i(D)應為 0
23. [微積分－級數極限](甲)(乙)(丙)都發散，不能求和
24. [高一]同時滿足 A、B 的元素只有 1,4,5,10。
25. [高一]正弦定理 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}=\frac{3}{2}$
26. [高二]拋物線是上下對稱的，橢圓也是，所以(a,-b)。
27. [微積分](A)發散(C)多了-5=x 跟 x=5(D)多了 x=5
28. [高二]係數會是三角形數，故其和為 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 。
29. [國三]我用很芭樂的招數，假設 EFG 是等腰三角形。
並從 E 作中垂線交 AD 於 H,交 BC 於 I
連 AI,DI，切成四個三角形 AFI,AEI,DEI,DGI
面積＝ $\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}\overline{CD}(2h+b)\Rightarrow\overline{CD}=\frac{bh}{2h+b}$
30. [國三] $P_1=\frac{1}{2}$；$P_2=\frac{2}{4}$；$P_1=\frac{6}{16}$。
31. [高三]披了極限的皮，其實是分項對消法，$S_n=2(1-\frac{1}{n})$
所求極限就是 2
32. [國三]曠日廢時的窮舉法，符合的有 $(2,3)\frac{1}{12}$；$(3,2\text{or}4)\frac{1}{9}$；
$(4,3\text{or}6)\frac{1}{9}$；$(6,4)\frac{1}{12}$，機率相加為 $\frac{3+4+4+3}{36}=\frac{7}{18}$
33. [高二]活命機率，(A)(B)都是 $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{9}{19}$ (D) $\frac{1}{2}\times\frac{10}{19}$
34. [高二]正面表列，$\frac{C_4^5+C_3^5C_1^7+C_2^5C_2^7}{C_4^{12}}=\frac{285}{495}=\frac{19}{33}$
35. [高一](x,y)=(1,0),(2,1)，除了這兩組，
$3^y=2^x-1=2^{x-1}+2^{x-2}+...+1$ 不會再是 3 的次方了。
36. [高一] $f(x)=x+1$ ，$g(100)\equiv20\times f(100)-14(\text{mod}7)$
$\equiv2020(\text{mod}\,7)\equiv4(\text{mod}\,7)$
37. [高三] $a_n=\frac{2}{n}$ ，所求極限＝0
38. [高一]令 $\angle BAC=\theta$，則 $\overline{BC}^2=9-6\sqrt{2}\cos\theta$，四個小三角形面積皆相等，故和為 $4\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin\theta$。
所求面積＝ $18+6\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)\le30$ ，沒答案。
39. [高一] $y=(\cos x-\frac{a}{2})^2+(b-\frac{a^2}{4})\ge-4$ 發生在 $\cos x=1$
$\Rightarrow a=2,b=-3\Rightarrow ab=-6$
40. [高二]底圓半徑為 $8\sqrt{2}$，從剖面看，圓錐會形成一個等腰三角形，腰長為 $24\sqrt{2}$ ，且球會形成內切圓。故 $\Delta=rs$ 。

$\frac{1}{2}\times 16\sqrt{2}\times 32=\frac{1}{2}\times 64\sqrt{2}\times t, t=8$

41. [高一]老梗題，令 $t=\log_2 k$ ，有四相異根，表判別式大於零。故 $12t^2-4(1-t^2)>0 \Rightarrow t>\frac{1}{2}, t<-\frac{1}{2}$ 。

又 $1-t^2>0, -1<t<1$ ， $2>k>\sqrt{2}$ (沒有選項),

$\frac{1}{2}<k<\frac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.7$ ，選(D)

42. [線代]可得 $A-A^2+A^3=0$ ，所求剩下 $A-A^2=I$ ，故 a+b+c+d=2

43. [高二]展開行列式之後剩下 4abc= $\frac{4}{3}$

44. [高一]為了快速解題，還是用座標法，令 R(0,0)，P(4,0)，Q(0,3)，則 A(-8,9)，B(0,-6)，C(12,0)。可輕易得到

$\overrightarrow{AP}=(12,-9), \overrightarrow{AB}=(8,-15), \overrightarrow{AC}=(20,-9)$ ，

解出 $x=9, y=6$

45. [高二]先用 A、B、C 算出平面方程式為

$7x+7y-5z=6 \Rightarrow a+b=\frac{36}{7}$ ，也是找不到答案。

46. [高二]顯然此斜平面方程式為 x+y+z=6，與三座標軸構成的四面體體積為 $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 6\times 6)\times 6=36$

47. [高二]面積極大值發生在 z_1, z_2 相差90度，此時面積為

$\frac{1}{2}\times 5(5-\frac{1}{5})=12$

48. [高二]定義題，判別式＝ $b^2-4ac=(-18)-4\times 13\times 37<0$ 故為橢圓。

49. [高二]三面共線，表無限多解，故 $\Delta=0$ ，即

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow k=6,0(\text{重根，不合})$$

代回三平面，再用外積找出直線的方向向量為(1,1,1)

故所求為 $\frac{1+1+1}{1+2+3}=\frac{1}{2}$

50. [高二]z 的次數需為 6 的倍數才會是實數，故 1～100 有 16 個，機率為 $\frac{16}{100}=\frac{4}{25}\Rightarrow p+q=29$