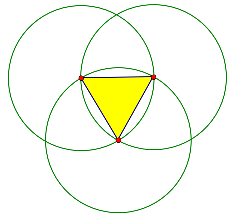
96 桃園縣略解

1. [國一]送分題，211 是質數。



2. [國二]灰色＝一黃＋三白，先算出白色部分為＝$\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$

故灰色＝$\frac{\sqrt{3}}{4}+3\times(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

3. [高一]當 a≦0 時， $f(a)=2^{-a}>2^{1},-a>1,a<-1$

當 a>0 時， $f(a)=\sqrt{a}+1>2,\sqrt{a}>1,a>1$

4. [高二]無解表$\Delta=0=5a^{2}-a-4=(5a+4)(a-1)\Rightarrow a=1,-\frac{4}{5}$，但$a=1$會使得 $\Delta_{x}=0$，故不合。

5. [國三]斜線區域面積＝$a\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{a}{5}$

6. [高一]$(52\pm6\sqrt{43})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{43}\pm3$，令$a=\sqrt{43},b=3$

原式＝$(a+b)^{3}-(a-b)^{3}=6a^{2}b+2b^{3}=2b(3a^{2}+b^{2})=6(129+9)=828$

7. [微積分－積分]令$u=3x^{2}+1,du=6xdx$，

原式＝$\int\frac{1}{u^{2}}\times\frac{1}{6}du=-\frac{1}{6}\times\frac{1}{u}+c=-\frac{1}{6(3x^{2}+1)}+c$

8. [微積分－微分]基本題，就(C)

9. [高一]$\begin{cases}\log a=\log7-1=-0.155\\ \log b=\log5-0.75\fallingdotseq-0.051\Rightarrow b>c>a\\ \log c=\log3-0.6\fallingdotseq-0.123\end{cases}$

10. [高一]令 AC 與 EF 交點為 G，則$\tan\angle CAD=\frac{\overline{FG}}{\overline{AG}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overline{FG}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow\overline{EF}=\sqrt{5}$

11. [國三]先扣掉平手再除以 2，$\frac{1}{2}(1-\frac{6}{36})=\frac{5}{12}$

12. [微積分－微分應用]小陷阱在於是求法線，所以先求切線，再轉法線。

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{3x^{2}-6y}{3y^{2}-6x}$，代(3,3)進去，得到切線斜率為－1，故法線斜率為 1。

又法線通過(3,3)，綜合起來易得法線方程為$-x+y=0\Rightarrow2a+c=-2$

13. [高一]老梗，兩邊取對數，$2x\sqrt{x}\log x=x\log(x\sqrt{x})$，令$t=\log x$

改寫為$x(2\sqrt{x}-\frac{3}{2})t=0\Rightarrow t=0,x=1$與$\sqrt{x}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{9}{16}\Rightarrow$所求＝$\frac{25}{16}$

14. [高一] $x^2=\dfrac{1}{3+\sqrt{8}}=3-2\sqrt{2}, x=\sqrt{2}-1, x+1=\sqrt{2}$ 所求＝1。

15. [微積分－反函數]常出的老梗題，令 $y=\dfrac{x^3-1}{x^3+1} \Rightarrow x^3=\dfrac{1+y}{1-y}$

$$f(y)=\frac{2y}{1-y}, f'(y)=\frac{2}{(1-y)^2}, f'(0)=2$$

16. [國一]滿足 $2^x-2^y=2$ 且 x+y=3 只有(x,y)=(2,1)，所求＝6

17. [國三]設三圓半徑分別為 a,b,c，不失一般性，可令 a+b=3,b+c=4,c+a=5，解得 a=2,b=1,c=3，故最大為 3

18. [高二]科西不等式。 $(x^2+4y^2+9z^2)(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9})\geq(x+y+z)^2$

$-7\leq x+y+z\leq 7$

19. [微積分－極限]變一下才能用羅必達。

原式$=\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$

20. [邏輯]若 A 是君子國，則 B 應回我跟 A 為同一個國家。故 A 是小人國，B 是君子國。

21. [國一]輾轉相除法，(111349,75882)=1

22. [高一]分項對消法，展開後，原式＝$\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})=\frac{1}{6}$ $(\because \frac{1}{n}\to 0)$

23. [高一] (A)對數函數不會通過(1,0)(B)應為遞增(C)應為遞減。(D)這兩個互為反函數，故對稱軸為 x=y。

24. [高二]可以配方成為 $(2x+4y-1)(2x-4y+3)=0$ ，兩相交直線。

25. [微積分－分部積分轉 gamma 函數]gamma 函數出現過幾次，看要不要學會，見仁見智。令 $x=e^{-t}, \ln x=-t, dx=-e^{-t}dt$ ，積分範圍改成 0 到無窮大。

故原式＝$\displaystyle\int_0^\infty t^4e^{-4t}\cdot -e^{-t}dt=\frac{1}{5^5}\int_0^\infty(5t)^{5-1}e^{-5t}d(5t)=\frac{1}{5^5}\Gamma(5)=\frac{4!}{5^5}$

這其實很奇技淫巧，考試的時候除非很熟練，不然還是分部積分比較妥當。自己越熟練的方法才是好方法。