

基隆市 96 學年度市立高中國中部暨國民中學新聘教師聯合甄選「數學科」試題

注意事項：

1、請核對答案卷上准考證號碼是否正確。

2、每題均為單選題，請選出一個正確答案或最佳答案；每題 4 分，答錯不倒扣，總分 100 分。

一、單選題：

1. 下列 6 個多項式中，有幾個是 $x^7 - x$ 的因式？

$$x^2 + x + 1, x^2 - 1, x^2 - x, x^3 - 1, x^4 + x^2 + 1, x^4 + x$$

- (A) 3 個 (B) 4 個 (C) 5 個 (D) 6 個

2. 有 n 個拾元銅板，若每 5 個一堆，則剩 4 個；若每 6 個一堆，則剩 3 個；若每 8 個一堆，則剩 7 個。已知銅板不超過 100 個，則銅板個數 n 滿足下列哪一個範圍？

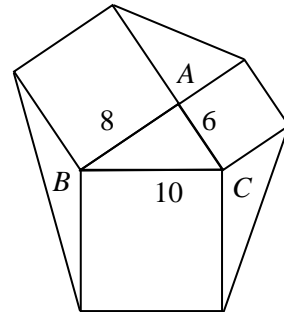
- (A) $n < 20$ (B) $20 \leq n < 40$ (C) $40 \leq n < 60$ (D) $60 \leq n < 100$

3. 方程式 $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 有幾個解？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 如右圖，六邊形分成 4 個三角形和 3 個正方形。已知裡面的三角形 ABC 邊長分別為 6, 8, 10。則這 7 個三角形和正方形中有幾個面積為 24？

- (A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4



5. 若 $(a, -19, 11)$ 可寫成 $(1, -2, 3)$ 和 $(1, 3, -1)$ 的線性組合，則 a 的值為何？

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

6. 定義 $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ ，則 $99! + 202$ 與 $100!$ 的最大公因數是多少？

- (A) 2 (B) 10 (C) 99 (D) 101

7. 在直角坐標平面上，設 $A(-3, 0)$, $B(7, 0)$ ，以 \overline{AB} 為直徑的圓交 y 軸於 C 點，且 C 在 x 軸的上方。過 C 作此圓的切線交 x 軸於 D 點，則 D 的 x 坐標為何？

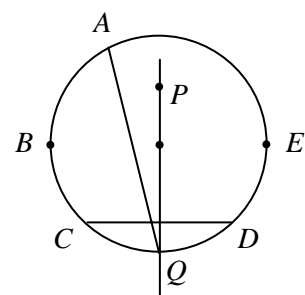
- (A) $-\frac{21}{2}$ (B) $-\frac{15}{2}$ (C) $-\frac{25}{3}$ (D) $-\frac{19}{3}$

8. 設拋物線 $x^2 + (m+5)x + 7m+3 = 0$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點。設 A 的 x 坐標為 a ， B 的 x 坐標為 b ，其中 $a < 0 < b$ 。若 $\overline{OA} : \overline{OB} = 3 : 5$ ， O 為原點，則 $b - a$ 的值為何？

- (A) 4 (B) 9 (C) 13 (D) 16

9. 在右圖的圓中，已知弧 ABC 為 120° ，弧 AED 為 160° 。直線 PQ 為 \overline{CD} 的垂直平分線且交圓於 Q ，則 $\angle AQP$ 是幾度？

- (A) 5°
(B) 10°
(C) 15°
(D) 20°



10. 關於函數 $f(x) = x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, 下列哪個敘述是正確的?

- (A) $f(x)$ 有一個相對極大值和一個相對極小值.
- (B) $f(x)$ 沒有相對極大值和相對極小值.
- (C) $f(x)$ 有一個相對極大值, 但沒有相對極小值.
- (D) $f(x)$ 沒有反曲點.

11. 將 $(1 + \sqrt{3}i)^8$ 展開後的乘積與下列何者相等?

- (A) $64 - 64\sqrt{3}i$
- (B) $-64 + 64\sqrt{3}i$
- (C) $-128 + 128\sqrt{3}i$
- (D) $128 - 128\sqrt{3}i$

12. 若函數 $f(x) = (x+1)^{\cot x}$ 在 $x=0$ 連續, 則 $f(0)$ 應定義為下列哪一個?

- (A) $f(0) = 0$
- (B) $f(0) = e^{-1}$
- (C) $f(0) = e^{\frac{1}{2}}$
- (D) $f(0) = e$

(選項中 e^x 為自然指數)

13. 在極坐標中, 方程式 $r = \csc \theta (\csc \theta + \cot \theta)$ 的圖形為何?

- (A) 一個雙曲線
- (B) 一個橢圓
- (C) 一個拋物線
- (D) 一個心臟線

14. 已知下列兩個方程組有相同的解 (x, y, z, u) , 則 a 的值為何?

$$\begin{cases} x + 2y - z - u = -5 \\ 4y - z - 2u = -11 \\ z - 2u = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + au = -6 \\ bx - y - z - u = 1 \\ 3x - y - z = c \end{cases}$$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

15. 已知直線 $L: \begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ -10x + 2x - z = -3 \end{cases}$ 及平面 $\Omega: x + 4y - 2z = 2$, 則直線 L 與平面 Ω 的關係為何?

- (A) L 平行於 Ω
- (B) L 在 Ω 上
- (C) L 垂直於 Ω
- (D) L 與 Ω 相交但 L 不垂直 Ω

16. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} * & a & b \\ * & * & * \\ * & * & c \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $A^2 - AB = I$, 則 $a + b + c$ 的值是多少?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

17. 在直角坐標平面上, 兩直線 $y = x$ 和 $y = 2x$ 所夾銳角的平分線之斜率為何?

- (A) $1 + \sqrt{2}$
- (B) $\frac{4}{3}$
- (C) $\frac{\sqrt{10} + 1}{3}$
- (D) $\sqrt{2}$

18. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆矩陣為 $\begin{bmatrix} a & * & * \\ * & b & * \\ * & * & c \end{bmatrix}$, 則 $a + b + c$ 的值是多少?

- (A) -3
- (B) 0
- (C) 2
- (D) 3

19. 29^{202} 除以 13 的餘數是多少?

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 9
- (D) 11

20. 設直線 $L: \frac{x-2}{a} = \frac{y-3}{b} = \frac{z-6}{c}$ 平行於平面: $x+3y-2z-5=0$, 且 L 與另一直線 $M: \frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{8}$ 相交,

則 $a:b:c$ 等於下列哪一個?

- (A) 5:3:2 (B) 5:1:4 (C) 3:-2:1 (D) 3:-1:-2

21. 設 f 為從 $\{1, 2, 3, 4\}$ 映至 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的函數, 滿足 $f(f(x)) = f(x)$, 則這樣的函數共有幾個?

- (A) 13 (B) 30 (C) 41 (D) 52

22. 設 f 為從實數集合映到正實數集合的函數, 滿足: 對於每一個實數 x, y 都有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 則下列敘述何者是正確的?

甲、 f 為一對一函數;

乙、 f 為映成函數;

丙、對於每一個實數 x , 都有 $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$;

丁、對於每一個整數 n , 都有 $f(n) = (f(1))^n$.

- (A) 僅丙正確; (B) 僅丁正確; (C) 僅丙、丁正確; (D) 甲、乙、丙、丁都正確.

23. 若方程組 $\begin{cases} x+2y-2z-4w=0 \\ x-y-3z+2w=0 \\ x-3y+4z+6w=0 \\ x+y-z+kw=0 \end{cases}$ 有異於 $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ 的解, 則 k 的值為何?

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

24. 設 $ABCD$ 為平行四邊形, 向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, P 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AP}:\overline{PB} = 3:2$. 設 \overline{BD} 與 \overline{CP} 交於 Q . 令向量

$\overrightarrow{PQ} = s\vec{a} + t\vec{b}$, s, t 為實數, 則 (s, t) 為下列哪一個?

- (A) $(\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ (B) $(\frac{3}{7}, \frac{2}{35})$ (C) $(\frac{4}{7}, \frac{12}{17})$ (D) $(\frac{4}{35}, \frac{2}{7})$

25. 積分 $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ 的值為何? ($\ln x$ 為自然對數)

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) ∞

基隆市 96 學年度市立高中國中部暨國民中學新聘教師聯合甄選「數學 科」答案卷

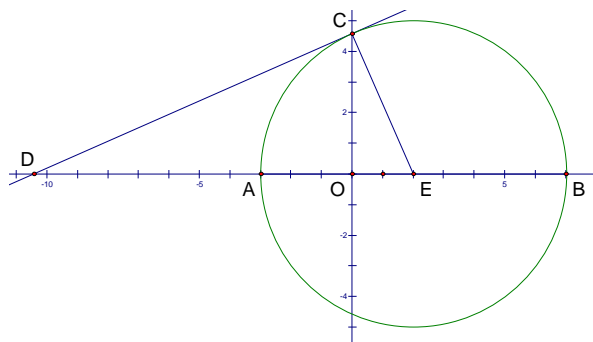
單選題；每題 4 分，總分 100 分。

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	D	A	A	A	D	B	B
題號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	C	D	C	A	D	D	C	C	B	B
題號	21	22	23	24	25					
答案	C	C	A	D	B					

96 基隆市略解

1. [國二] $x^7 - x = x(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ ，這六個都可以。
2. [高一]利用中國餘數定理，得到通解為 $39 + 120t$ ，選(B)
3. [高一] $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + x) \geq \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1 > \frac{1}{2}$ ，故無解
4. [高一]跟 95 年台南縣 38 題類似，四個三角形面積都是 24。
5. [線代]按題意 $(1, -2, 3)x + (1, 3, -1)y = (a, -19, 11)$ ，先解出 $x=2, y=-5$ ，再代回求 a ，可得 $a=-3$ 。

6. [高一]輾轉相除法，
 $(99! + 202, 100!) = (99! + 202, -20200)$ ，
 而 $20200 = 2^3 \times 5^2 \times 101$ 不會有 99 的
 因數， $99! + 202$ 顯然不會有 101 跟
 10 的因數，選項中就剩 2 了。



7. [國三]如圖，易得 $\triangle OCE \sim \triangle CDE$ ，

$$\overline{OE} \times \overline{DE} = \overline{CE}^2$$

$$\Rightarrow \overline{DE} = \frac{25}{2} \Rightarrow D(-\frac{21}{2}, 0)$$

8. [國三]可設 $A(-3t, 0)$ ， $B(5t, 0)$ ， $t > 0$

$$\begin{cases} m + 5 = -2t \\ 7m + 3 = -15t^2 \end{cases} \Rightarrow 32 = 15t^2 - 14t \Rightarrow t = 2, -\frac{16}{15} (\text{不合})，\text{所求} = 8t = 16$$

9. [國三]令 PQ 交圓於 R 點，則 AR 弧度可慢慢求出 $= 20^\circ$ ，故 $\angle AQP = 10^\circ$

10. [微積分－微分應用] $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ ，遞增，所以不會有相對極大跟極

小。 $f'''(x) = -\cos x$ ，在 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 都是反曲點。

11. [高二]棣美弗，原式 $= [2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})]^8 = 2^8 (\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3})$

$$= -128 + 128\sqrt{3}i$$

12. [微積分－極限] $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(x+1) \times \cot x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 x(x+1)}} = e^1$ ，選(D)

13. [微積分－座標變換]慣例上，令 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ，

$$\text{原方程式可表為 } r^2 \sin^2 \theta = r + r \cos \theta \Rightarrow x^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + y \Rightarrow 2y = x^2 - 1$$

14. [高二]先解左邊的方程組，用 u 來表示 $x, y, z \Rightarrow \begin{cases} x = u - 2 \\ y = u - 4 \\ z = 2u - 5 \end{cases}$ ，再代入右邊的方

程組，可求出 $a = -2$ 。

15. [高二]先用外積求出 L 的方向向量為 $(1, 4, -2)$ 恰為平面的法向量，因此兩者垂直。我不知道為甚麼答案會更改成(D)，請自行查證。

16. [線代] $AB = A^2 - I \Rightarrow B = A - A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a + b + c = 3$$

17. [高二]我是座標法一路用到底的，所以令這兩條直線與 $x=1$ ，兩兩相交於三頂點，分別是 $(0,0), (1,1), (1,2)$ ，故所求角平分線會交 $x=1$ 於 $(1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}})$ ，

$$\text{化簡 } 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{10} - 2}{3} = \frac{\sqrt{10} + 1}{3}, \text{ 即為斜率值。}$$

18. [線代]求反矩陣算是線代一定要會的東西，多練習就會了。

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, a + b + c = 2$$

19. [國一]老梗， $29^{202} \equiv 3^{202} \pmod{13} \equiv (3^3)^{67} \times 3 \pmod{13} \equiv 3 \pmod{13}$

20. [高二]首先， $a + 3b - 2c = 0$ ，就剩(B)了

21. [高一或高二]這一題我不會，網路上應該有人有解，我有看沒有懂。

22. [高一]符合這種格式的一定是指數函數 $f(x) = a^x$ 。最誇張的就是 $a=1$ 的時候，所以(甲)不對，(乙)不對，(丙)對，(丁)對。

23. [高二]先用前三個方程式解出如何用 w 表示 x, y, z 。

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2w \Rightarrow 2w + kw = 0, k = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

24. [高一]我用了很多特殊化的條件，一樣坐標化，讓 $A(0,0), P(3,0), B(5,0)$

$$C(5,12), D(0,12), \text{ 則 } Q(\frac{25}{7}, \frac{24}{7}), \overrightarrow{PQ} = (\frac{4}{7}, \frac{24}{7}) \Rightarrow (s, t) = (\frac{4}{35}, \frac{2}{7})$$

25. [微積分—分部積分與瑕積分]原式 $= -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^\infty - \frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 1$