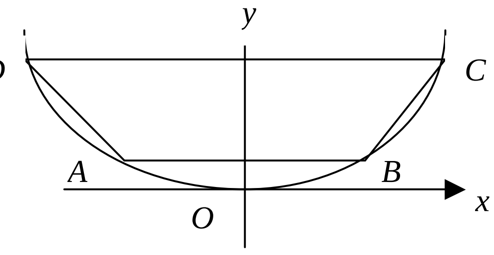
貳、數學專業科目

選擇題（共 30 題，每題 2 分，計 60 分）

41. 一元二次方程式 $x^2-49x+m=0$ 之兩根 p、q 皆為質數(設 $p>q$)，則 $q=$？
(A)2 (B)3 (C)5 (D)7。

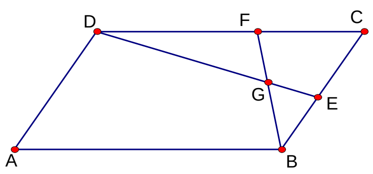
42. 如圖，A、B、C、D 四點皆在 $y=x^2$ 的圖形上，若 $\overline{DA}=\overline{AB}=\overline{BC}$，且 $\angle C=\angle D=60^\circ$，$\overline{AB}//\overline{CD}$，則四邊形 $ABCD$ 的面積是多少？



(A)$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B)$\sqrt{3}$ (C)$\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D)$2\sqrt{3}$。

43. 計算 $\sqrt{103\sqrt{102\sqrt{101\sqrt{100\times98+1}+1}+1}+1}$ 值是多少？
(A)103 (B)102 (C)101 (D)100。

44. 如圖，$ABCD$ 是平行四邊形，E、F 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 上，且 $\overline{DF}:\overline{FC}=3:2$，$\overline{CE}:\overline{EB}=5:4$，$\overline{BF}$，$\overline{DE}$ 交於 G 點，求 $\overline{DG}:\overline{GE}=$？



(A)16：5 (B)20：6 (C)24：7 (D)27：8。

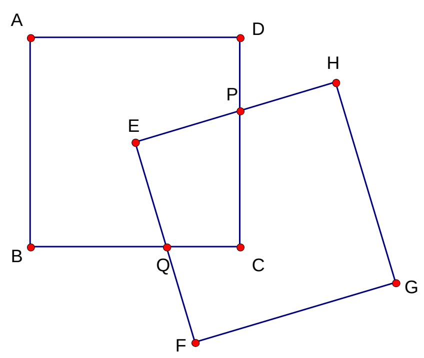
45. 設 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}=\frac{B}{A}$，其中 A,B 為互質的正整數，試問 B 為下列哪一個數的倍數？
(A)11 (B)13 (C)17 (D)19。

46. 有一個樓梯有 10 階，某人上樓每次可以上爬 1 階或 2 階，請問此人爬完 10 階的方法有多少種？
(A)86 (B)87 (C)88 (D)89。

47. 設 x,y,z 為正數且 $x+y+z=1$，求 x^2yz 之最大值是多少？
(A)$\frac{1}{24}$ (B)$\frac{1}{27}$ (C)$\frac{1}{48}$ (D)$\frac{1}{64}$。

48. 阿財有錢 20 萬元，存入一家銀行，已知年利率為 7%，每年複利一次，若阿財欲使 $n(n\in N)$年後的本利和達到 30 萬元以上，則 n 的最小值為
(A)4 (B)5 (C)6 (D)7 ($log1.07=0.0294$，$log1.5=0.1761$)

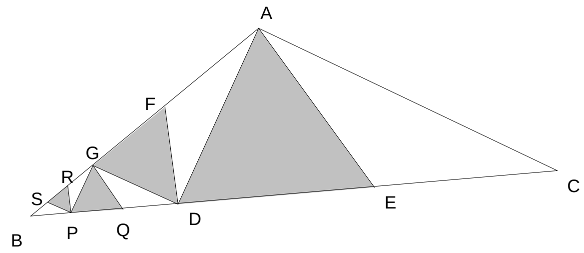
49. 如圖，兩個正方形 $ABCD$、$EFGH$ 的邊長都是6，且 E 是正方形 $ABCD$ 的中心，$\overline{EH}$ 交 $\overline{CD}$ 於 P，$\overline{EF}$ 交 $\overline{BC}$ 於 Q，$\angle EPC=60^\circ$，求 $EQCP$ 的面積是多少？



(A)$4\sqrt{2}$ (B)$6\sqrt{2}$ (C)8 (D)9。

50. 若將 n 個連續正整數 1、2、3、⋯、n 中，刪去一個數後，使得剩下$(n-1)$個數的總和為 2007，則刪去的數是那一個？
(A)7 (B)8 (C)9 (D)10。

51. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120^\circ$，$\overline{AB}=\overline{AC}=6$，在 $\overline{BC}$ 上取 D、E，使得 $\triangle ADE$ 為正△；在 $\overline{AB}$ 上取 F、G，使得 $\triangle DFG$ 為正△；在 $\overline{BD}$ 上取 P、Q，使得 $\triangle GPQ$ 為正△；在 $\overline{BG}$ 上取 R、S，使得 $\triangle PRS$ 為正△，求 $\triangle ADE+\triangle DFG+\triangle GPQ+\triangle PRS$ (指這些△的面積和)是多少？



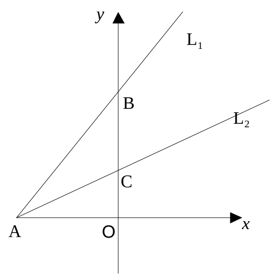
(A)$\frac{40\sqrt{3}}{27}$ (B)$\frac{43\sqrt{3}}{8}$ (C)$\frac{820\sqrt{3}}{81}$ (D)$\frac{40\sqrt{3}}{9}$。

52. 已知 $1=1$，$3+5=8=2^3$，$7+9+11=27=3^3$，⋯按照其規律性，$10^3=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{10}$，其中 $a_1<a_2<a_3\ldots\ldots<a_{10}$，則 $a_{10}=$？
(A)99 (B)101 (C)109 (D)111。

53. 正方形 $ABCD$ 之邊長為 1，在 $\overline{AB}$ 邊及 $\overline{AD}$ 邊上各取一點 E、F 使得 $\overline{AE}=\overline{AF}$，且四邊形 $BCFE$ 之面積為最大，則此最大面積為？
(A)$\frac{3}{4}$ (B)$\frac{5}{8}$ (C)$\frac{7}{12}$ (D)$\frac{11}{16}$。

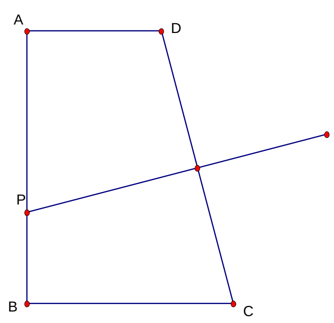
54. 甲袋中有 5 元，10 元硬幣各 1 個，乙袋中有 5 元，10 元硬幣各 2 個，今每次從甲、乙袋中各任取出 1 個硬幣互換之(每個硬幣被取到的機會均等)。求：互換二次後，甲袋中有 2 個 5 元硬幣的機率是多少？
(A)$\frac{3}{16}$ (B)$\frac{5}{16}$ (C)$\frac{7}{16}$ (D)$\frac{9}{16}$。

55. 已知直線 L_1：$y=\frac{4}{3}x+4$ 分別交 x 軸、y 軸於 A、B 兩點，L_2 平分 $\angle BAO$ 交 y 軸於 C 點，則 L_2 的直線方程式為



(A)$x-2y+3=0$ (B)$x-3y+3=0$
(C)$2x-y+3=0$ (D)$3x-y+3=0$

56. 如右圖所示，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，若兩底長 $\overline{AD}=20$，$\overline{BC}=30$，高 $\overline{AB}=40$，$\angle A=\angle B=90^\circ$，且 $\overline{CD}$ 之中垂線交 $\overline{AB}$ 於 P，則 $\overline{AP}=$？



(A)$\frac{117}{4}$ (B)$\frac{114}{4}$ (C)$\frac{111}{4}$ (D)$\frac{105}{4}$。

【背面尚有試題，請翻面作答】

57. 方程組$\begin{cases}\dfrac{xy+x}{x+y+1}=2\\ \dfrac{xz+2x}{x+z+2}=3\\ \dfrac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}=4\end{cases}$ 的解中 $z=$？

(A)18 (B)20 (C)22 (D)24。

58. 若四位數『$aabb$』是一個完全平方數(a,b 為小於 10 的自然數)，則 a 是多少？

(A)6 (B)7 (C)8 (D)9。

59. 平面上任意一條直線最多可以把平面分成兩個區域，兩條相異直線最多可以把平面分成四個區域，請問六條直線最多可以把平面分成幾個區域？

(A)20 (B)21 (C)22 (D)23。

60. 試問 a 的範圍為何時，可以使得方程式 $cos2x+sinx=a$ 有實數解？

(A)$[-2,\frac{9}{8}]$ (B)$[-2,\frac{7}{8}]$ (C)$[-1,\frac{9}{8}]$ (D)$[-1,\frac{7}{8}]$

61. 設 $D=\{n\in N:n\neq 3\}$，函數 $f:D\to R$，定義為 $f(n)=\dfrac{5n^2-6n-15}{n^2-2n-3}$，若已知 $f(n_0)\geq f(n),\forall\, n\in D$，則 $n_0=$？

(A)96 (B)48 (C)24 (D)4

62. 在一個兩位數中間插進一個 0~9 的數字使其變成一個三位數，例如：在兩位數 39 中間插進數字 0，變成三位數 309；又例如：在兩位數 27 中間插進數字 3，變成三位數 237。有些兩位數中間插進一個數字變成三位數後，會是原來兩位數的 m 倍，則 m 的最大值為何？

(A)20 (B)19 (C)18 (D)17

63. 有編號 1~1500 的 1500 盞電燈，當第一次按下開關時，編號 1~1500 的電燈都亮；第二次按下開關時，編號可以被 2 整除的電燈都熄滅，但其餘的燈仍亮著；第三次按下開關時，編號可以被 3 整除的電燈都熄滅，但是剛才第二次按下開關時熄滅的電燈變成亮著；…；第 k 次按下開關時，編號可以被 k 整除的電燈都熄滅，但是在剛才按下第 $k-1$ 次開關時熄滅的電燈會變成亮著；這樣總共按了 1500 次開關，則亮著的電燈中編號最大的是幾號？

(A)1500 (B)1472 (C)1444 (D)1416

64. 設某直角三角形的三邊長分別為 p、q、r，其中 r 為斜邊長，若 $\dfrac{p+q+r}{p+r}=\sqrt{2}$ 且此直角三角形的面積等於 2，則直角三角形的周長為多少？

(A)$3+\sqrt{2}$ (B)$3+2\sqrt{2}$ (C)$4+\sqrt{2}$ (D)$4+2\sqrt{2}$

65. 設 $A=\{-2,0,1\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，考慮所有的函數 $f:A\to B$ 使得對任意的 $x\in A$ 都滿足 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇數，這樣的函數 $f(x)$ 共有多少個？

(A)11 (B)15 (C)27 (D)45

66. 給定平面上 $A(-4,0)$、$B(2,0)$ 兩點，在直線 $y=-x+1$ 上可以找到幾個點 C 使得 $\triangle ABC$ 是直角三角形？

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

67. 有相異兩圓的半徑長分別是 a 及 b（$a\neq b$），且這兩個圓的連心線長為 c。已知方程式 $x^2-2ax+b^2=c(b-a)$ 有重根，則下列敘述何者正確？

(A)兩圓外切 (B)兩圓內切 (C)兩圓外離 (D)兩圓相交

68. 有多少個正整數 n，可以使得 $n^2+5n+13$ 是完全平方數？

(A)沒有 (B)1 個 (C)2 個 (D)無窮多個。

69. 空間中的點 $(3,-1,4)$ 到直線 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$ 的距離為多少？

(A)$\sqrt{6}$ (B)$\sqrt{5}$ (C)2 (D)$\sqrt{3}$

70. 已知直線 L 通過 (a,b)、(b,a)、$(a-b,b-a)$ 相異三點，則直線 L 通過哪些象限？

(A)一、三象限 (B)二、四象限 (C)一、二、三象限 (D)一、二、三象限。

96 台北市略解

1. [國二]兩根和為 49，又要都質數，就只有(2,47)，故 q=2。

2. [國三]不失一般性，按題意，可令 $C(t,t^2),D(-t,t^2),A(-\frac{t}{2},\frac{t^2}{4}),B(\frac{t}{2},\frac{t^2}{4})$ ，

   而 $\frac{\sqrt{3}}{2}t=t^2-\frac{t^2}{4}\Rightarrow t=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ，所求＝$3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times t^2=\sqrt{3}$

3. [國二]慢慢剝殼，可以得到 102。

4. [國三]可以偷偷用一下孟氏定理，$\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\times\frac{\overline{DG}}{\overline{GE}}=1$ ，$\frac{\overline{DG}}{\overline{GE}}=\frac{27}{8}$

5. [國一]兩兩相加，分母不同，但分子都有 13 的因數，又不會被分母約掉，而留著。

6. [高二]先用 $x+2y=10$ 找出解，再來排列。如下表。共 89 種

x	10	8	6	4	2	0
y	0	1	2	3	4	5
排列數	1	9	28	35	15	1

7. [高二]算幾不等式 $\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y+z}{4}=\frac{1}{4}\geq\sqrt[4]{\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}\times y\times z}$ ，$\frac{1}{64}\geq x^2yz$

8. [高一] $(1.07)^n\geq 1.5$ ，$0.0294n\geq 0.1761$，最小 $n=6$ 。

9. [國二]轉正之後，重疊面積就是四分之一正方形，面積就是 9。

10. [國二] $\frac{n(n+1)}{2}-k=2007$ ，比 2007 大又最靠近的數為 2016，故 k=9。

11. [國三]這些三角形面積之間會形成公比為三分之一的等比數列，最大的面積是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$ ，總和為 $3\sqrt{3}\times\frac{40}{27}=\frac{40}{9}\sqrt{3}$

12. [國二]每個組合的最後一個數字為 $n(n+1)-1$ ，n=10 代入得 109。

13. [國三]此面積為 $1-\frac{x^2}{2}-\frac{(1-x)1}{2}=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{8}\leq\frac{5}{8}$

14. [線代－馬可夫鏈]轉移矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\\frac{3}{4}&\frac{2}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ ，初始矩陣為 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ，第一次 $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{2}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

   第二次 $\begin{bmatrix}\frac{3}{16}\\\frac{10}{16}\\\frac{3}{16}\end{bmatrix}$

15. [國三]利用角平分線性質，$\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CO}}$ 可得 $C(0,\frac{3}{2})\Rightarrow L_2: x-2y+3=0$

16. [國二]設 $\overline{AP}=x$ 由 $\overline{CP}=\overline{DP}$ 可得 $x^2+20^2=(40-x)^2+30^2\Rightarrow x=\frac{105}{4}$

17. [高一]奇技淫巧，先把所有方程式都改成倒數。則原方程組可改寫成

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{7}{12}\\ \frac{1}{y+1}=\frac{5}{12}\\ \frac{1}{z+2}=\frac{1}{24}\end{cases}\Rightarrow z=22$$

18. [國二]顯然有 11 的倍數，故 a+b 亦為 11。從 6655,7744,8833,9922，只有 7744 可能為平方數，即 88 的平方。死背無敵。

19. [國二]公式是 $\frac{n(n+1)}{2}+1, n=6$ 代入得 22

20. [高一] $\cos 2x+\sin x=1-2\sin^2 x+\sin x=-2(\sin x-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}\le\frac{9}{8}$ ，又

$\sin x=-1$ 時，有極小值－2。

21. [高一] $f(n)=5+\frac{1}{n+1}+\frac{3}{n-3}$ ，n>3 即可，n=4

22. [很難的國一]設原數為 $10a+b$, 新數為 $100a+10c+b$ ，則

$m=\frac{100a+10c+b}{10a+b}=10+\frac{10c-10b}{10a+b}$ ，追求極大，則 $b=0$ ，$\frac{c}{a}=9$ ，m=19。

23. [國一]老梗了，找平方數，$1444=38^2<1500<39^2=1521$ 。

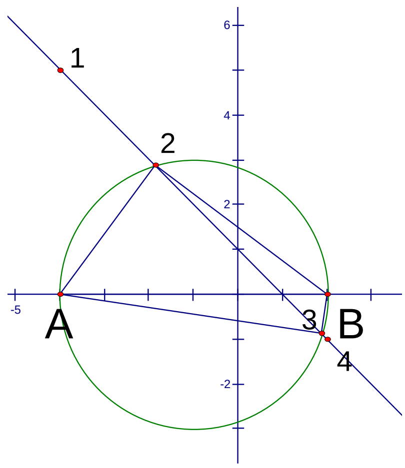
24. [有點難的國二] $\begin{cases}p^2+q^2=r^2\\ q=(\sqrt{2}-1)(p+r)\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{2}-1)^2(p+r)^2=(r+p)(r-p)$

$(4-2\sqrt{2})p=(2\sqrt{2}-2)r\Rightarrow r=\sqrt{2}p\Rightarrow p:q:r=1:1:\sqrt{2}$

面積＝2 $\Rightarrow p=q=2, r=2\sqrt{2}$

25. [高一]跟基隆那題一樣不會，請見諒。

26. [國三]垂直 AB 的兩個；以 AB 為直徑的圓，交直線又兩個。共四個。



27. [國三]有重根，表判別式＝0。故

$4a^2-4(b^2-bc+ac)=0$

$(a-b)(a+b-c)=0, \because a\ne b$

$a+b=c\Rightarrow$ 兩圓外切

28. [高一]老梗，令 $n^2+5n+13=k^2 \Rightarrow (2k+2n+5)(2k-2n-5)=27$

$\begin{cases}2k+2n+5=27\\2k-2n-5=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=7\\n=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2k+2n+5=9\\2k-2n-5=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=3\\n=-1(\text{不合})\end{cases}$ 故 1 個

29. [高二]令(3,-1,4)在直線上的垂足為 $(3t-2,-2t,4t+1)$ ，則有

$(3t-5,-2t+1,4t-3)\cdot(3,-2,4)=9t-15+4t-2+16t-12=0, t=1$

垂足為（1,-2,5）故所求距離為 $\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

30. [國一]由前兩點，易知直線方程為 $x+y=a+b$ ，由第三點知 $x+y=0$ 故過一三象限。