

貳、數學專業科目試題

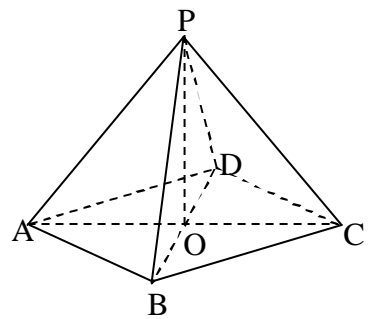
選擇題 (共 30 題, 每題 2 分, 共 60 分)

41. 計算 $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{4}}$ 的值等於
(A) -16 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $-\frac{1}{16}$ (D) $\sqrt{2}$
42. 若 $0 < a < b < c < d$, 則試問下列各數中最大者為何?
(A) $\frac{a+b}{c+d}$ (B) $\frac{a+d}{b+c}$ (C) $\frac{b+c}{a+d}$ (D) $\frac{c+d}{a+b}$
43. 有 4 個整數, 若任取 3 個數相加, 其和分別為 182、197、208 及 202, 則此 4 個整數中最大的為何?
(A) 55 (B) 61 (C) 76 (D) 81
44. 已知集合 $M = \{x | x < 3\}$, $N = \{x | \log_2 x > 1\}$, 則 $M \cap N =$?
(A) \emptyset (B) $\{x | 0 < x < 3\}$
(C) $\{x | 1 < x < 3\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$
45. 二次方程式 $x^2 - 43x + k = 0$ 二根均為質數, 則 k 有多少種可能值?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 至少 3 個
46. 設 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上為連續函數, 且滿足 $f(3)=2, f(7)=10$. 則下列敘述何者為真?
(A) $f(5)=6$
(B) $2 \leq f(5) \leq 10$
(C) 在 $[3, 7]$ 上可以找到一點 c 滿足 $f(c)=4$
(D) 在 $[3, 7]$ 上可以找到一點 c 滿足 $f(c)=0$
47. 父親帶著兒子去跆拳道訓練班報名, 父親問教練說:「請告訴我, 你班裡目前有多少位學生?」教練回答:「如果再招收一批和現在人數相同的學生, 然後再招原人數的半數後, 再招原人數的四分之一, 加上你的兒子在內, 就有一百個學生。」試問該訓練班目前有多少位學生?
(A) 24 (B) 36 (C) 42 (D) 48
48. 若 $f(2x) = \frac{2}{2+x}$, 其中 $x > 0$, 則 $2f(x) =$?
(A) $\frac{2}{1+x}$ (B) $\frac{2}{2+x}$ (C) $\frac{4}{1+x}$ (D) $\frac{8}{4+x}$
49. 如右圖, 每一個小正方形方格都相同大小, 從 A 點以外的格子點中任取 2 點, 恰好和 A 點排成一直線的機率為何?
(A) $\frac{5}{119}$ (B) $\frac{6}{119}$ (C) $\frac{7}{119}$ (D) $\frac{8}{119}$
50. 不等式: $(\frac{1}{2})^{\sqrt{1-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, 將解畫在數線上, 其長度 = ?
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$
51. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})} = 1$, 則常數 $a =$?
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

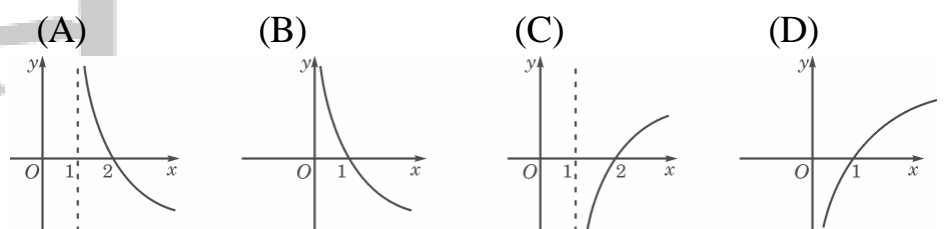
52. 下列哪一個多項式可以因式分解?

- (A) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ (B) $x^4 + x^3 + x^2 + 2$
(C) $x^4 + x^3 + x^2 + 3$ (D) $x^4 + x^3 + x^2 + 4$

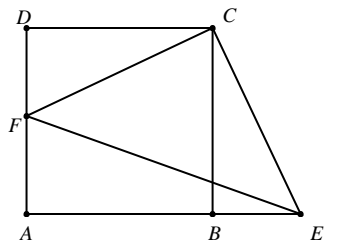
53. 如右圖, 在四角錐 P - ABCD 中, 底面是邊長為 2 的菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, 對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點, \overline{PO} 平面 ABCD, \overline{PB} 與平面 ABCD 所成的角為 60° . 求四角錐 P - ABCD 的體積是多少?



- (A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $3\sqrt{3}$

54. 函數 $y = 1 + a^x$ ($0 < a < 1$) 的反函數的圖形為下列何者?

55. 如右圖所示, ABCD 為正方形, $\triangle FCE$ 為直角三角形, 若正方形 ABCD 面積為 324, $\triangle FCE$ 的面積為 260, 則 $\overline{BE} =$?



- (A) 14 (B) 12
(C) 10 (D) 8

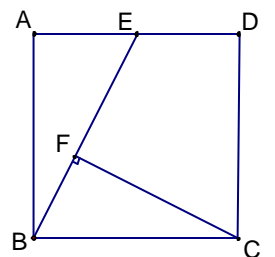
56. 設函數 f 定義如下表:

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	1	3	2

若 $a_1 = 4$, 且對所有 $n \geq 1$, 均有 $a_{n+1} = f(a_n)$, 試求 $a_{2008} =$?

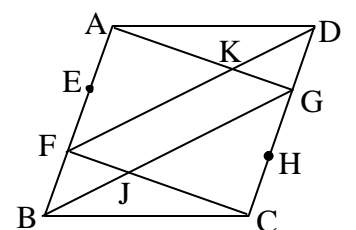
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

57. 如右圖, 正方形 ABCD 邊長為 2, 且 E 為 \overline{AD} 的中點, F 點在 \overline{BE} 上, 若 $\overline{CF} \perp \overline{BE}$, 則四邊形 CDEF 之面積為多少?



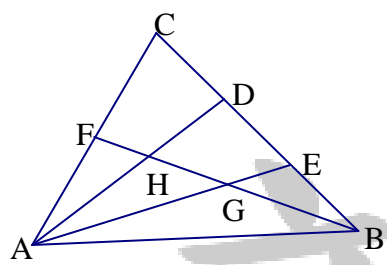
- (A) $\frac{11}{5}$ (B) $\frac{9}{4}$
(C) $3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{5}$

58. 如右圖, 平行四邊形 ABCD 中, $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$, $\overline{DG} = \overline{GH} = \overline{HC}$, \overline{AG} 與 \overline{DF} 交於 K 點, \overline{BG} 與 \overline{CF} 交於 J 點, 若四邊形 ABCD 的面積為 36, 則四邊形 FJGK 的面積是多少?



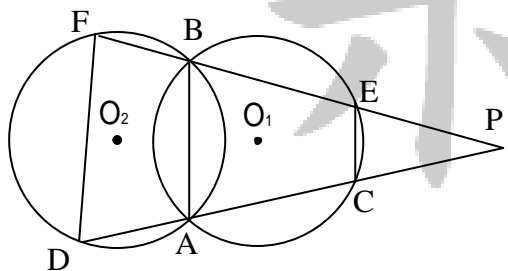
- (A) 7.2 (B) 8 (C) 9 (D) 10.8

59. 如右圖, $\triangle ABC$ 中, F 點是 \overline{AC} 中點, D 、 E 兩點在 \overline{BC} 上, 且 $\overline{BE} = \overline{DE} = \overline{DC}$, \overline{BF} 分別交 \overline{AD} 、 \overline{AE} 於 H 點、 G 點, 求 $\overline{GH} : \overline{HF} = ?$



- (A) 7:4 (B) 5:3
(C) 4:3 (D) 3:2

60. 如右圖所示, 兩圓 O_1 、 O_2 交於 A 、 B 兩點, P 為圓外一點, \overline{PA} 分別交圓 O_1 、 O_2 於 C 、 D 兩點, \overline{PB} 分別交圓 O_1 、 O_2 於 E 、 F 兩點, $\overline{CE} = 2$, $\overline{DF} = 6$, 若四邊形 $ADFB$ 的面積與四邊形 $ABEC$ 的面積相等, 則 \overline{AB} 長為多少?

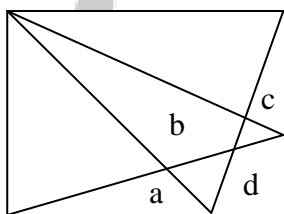


- (A) $2\sqrt{5}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $\frac{21}{5}$ (D) $\frac{9}{2}$

61. 已知等腰三角形 ABC 的外接圓半徑為 10, 其底邊 $\overline{BC} = 16$, 若 $\triangle ABC$ 的面積可能為 a 或 b , 且 $a > b$, 則 $a - b = ?$

- (A) 104 (B) 96 (C) 84 (D) 72

62. 如右圖, 某生設計徽章時, 在長方形紙張上畫了四條通過頂點的直線段, 將整個長方形分成 8 個區域, 已知 a 、 b 、 c 三區域的面積, 分別為 10、26、6, 求 d 區域的面積 = ?



- (A) 12 (B) 11 (C) 10 (D) 9

63. 試問下列哪一組量不能作為三角形的三個高?

- (A) 3、4、5 (B) 5、12、13
(C) 7、8、13 (D) 8、15、17

64. 有一函數 f 滿足 $f(n) = \begin{cases} n+3, & n \text{ 為奇數} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ 為偶數} \end{cases}$, 其中 $n \in N$, 若

已知一奇數 k 使得 $f(f(f(k))) = 27$, 則 k 之各位數字和為多少?

- (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
65. 已知一三角形之三邊長分別為 10, 15, k , 而且 k 為正整數, 試問滿足此三角形為鈍角三角形之 k 有多少個?

- (A) 4 (B) 6 (C) 12 (D) 19

66. 三個立方體其體積分別為 1、8 和 27, 今將其黏合在一起, 試問黏合體的最小的表面積為多少?

- (A) 84 (B) 76 (C) 74 (D) 72

67. 將 4^{2008} 展開後, 它的末二位數字為多少?

- (A) 16 (B) 36 (C) 56 (D) 76

68. 若 n 為某正整數的立方, 試問下列何者可能為 n 的正因數的個數?

- (A) 101 (B) 102 (C) 103 (D) 104

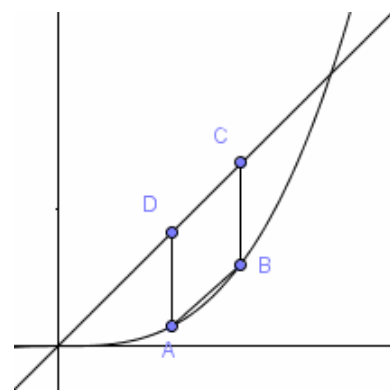
69. 設變數 x 、 y 滿足條件 $\begin{cases} y \leq x \\ x + y \geq 2 \\ y \geq 3x - 6 \end{cases}$, 則目標函數 $z = 2x + y$

的最小值 = ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9

70. 如右圖, 菱形 $ABCD$ 內接於 $y = x$ 與 $y = x^2$, 且 C 、 D 兩點在直線 $y = x$ 上, 求 A 點橫座標與縱座標之和 = ?

- (A) $8 + 5\sqrt{2}$ (B) $4 + 3\sqrt{2}$
(C) $2 + \sqrt{2}$ (D) $2 - \sqrt{2}$



臺北市 97 學年度市立國民中學教師聯合甄選 數學 學科答案卷

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	D	D	D	B	C	B	D	D	A
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	B	C	A	A	D	A	B	D	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	C	B	B	C	D	B	C	B	D

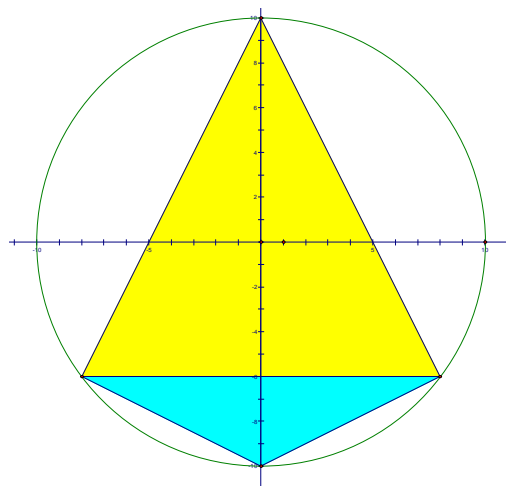
97 台北市略解

1. [高一] $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$
2. [國一]分母越小，分子越大，則分數越大，選(D)
3. [國一]四個和相加之後除以 3 得到 263，則最大數 $=263-182=81$
4. [高一] $\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$ 又 $x < 3$ ，故 $3 > x > 2$
5. [國二]老梗， $43=2+41$ ，只有一組可能。
6. [微積分—均值定理]就這麼回事，必然可找到 $f(c) = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = 4$
7. [國一] $x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100 \Rightarrow x=36$
8. [高一] $f(2x) = \frac{2}{2+x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2+\frac{x}{2}} \Rightarrow 2f(x) = \frac{8}{4+x}$
9. [高二]這一題有點麻煩，通過 A 的垂直線跟水平線還有右上左下對角線，這三條上面有 5 個點，然後左上右下對角線有 4 個點，其他漏網之魚還有 4 對。所以總共 $\frac{3C_2^5 + C_2^4 + 4}{C_2^{35}} = \frac{8}{119}$
10. [高一] $(\frac{1}{2})^{\sqrt{1-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1-x \geq 0$ 且 $1-x \leq \frac{1}{4}$ ，長度為 $\frac{1}{4}$
11. [微積分—極限] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{a\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow a=2$
12. [國二](B)有 $x+1$ 的因式
13. [高二] $\overline{OP} = \sqrt{3}$ ，菱形面積 $=2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 2\sqrt{3}$ ，體積 $=\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2$
14. [高一]原本圖形為 y 恆大於 1，反函數就應該是 x 恆大於 1，故(B)(D)出局，再來原本應恆通過(0,2)，反函數就應該恆通過(2,0)，所以只剩(A)。
15. [國二]易證 $\triangle CBE \cong \triangle CDF$ ，且 $\overline{CE} = \sqrt{520}$ ， $\overline{EF} = \sqrt{1040}$ ，正方形邊長 18，
 令 $\overline{BE} = \overline{DF} = x$ ，則 $\overline{FA} = 18 - x$ ， $(x-18)^2 + (x+18)^2 = 1040 \Rightarrow x = 14$
16. [高一]跟北縣 96 最後一題類似，裡面的 3 是不跟別人循環的，所以每三個一循環， $a_{2008} = a_1 = 4$
17. [國三]易得 $\triangle ABE \sim \triangle FCB$ ，且 $\triangle ABE = 1$ ， $\triangle FCB = \frac{4}{5} \triangle ABE = \frac{4}{5}$ ，所求 $=\frac{11}{5}$
18. [國三] $\text{AFCG} = \frac{2}{3} \text{ABCD} = 24$ ， $\text{FJGK} = \frac{1}{3} \text{AFCG} = 8$

19. [國三]可以連用兩次孟氏定理。

$$\begin{cases} \frac{\overline{BE} \times \overline{CA} \times \overline{FG}}{\overline{EC} \times \overline{AF} \times \overline{GB}} = 1 \\ \frac{\overline{BD} \times \overline{CA} \times \overline{FH}}{\overline{DC} \times \overline{AF} \times \overline{HB}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{FG} = \overline{GB} \\ \overline{HB} = 4\overline{FH} \end{cases} \Rightarrow \overline{GB} : \overline{GH} : \overline{HF} = 5 : 3 : 2$$



20. [國三]令 $\overline{AB} = x$ ，由題意知，

$$x^2 - 4 = 36 - x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$$

21. [國三]如右上圖，所求 $= \frac{1}{2} \times 16 \times (16 - 4) = 96$

22. [國三]老梗， $b = a + c + d$ ， $d = 10$

23. [國一]兩邊和需大於第三邊，則(B)那組不合。

24. [高一] $f(f(k+3)) = 27, f(\frac{k+3}{2}) = 27 \Rightarrow k = 51$

25. [國三] $\begin{cases} 5 < k < 25 \\ 100 + 225 < k^2 \Rightarrow k = 6 \sim 11 \text{ 與 } 19 \sim 24 \text{ 共 } 12 \text{ 個} \\ 100 + k^2 < 225 \end{cases}$

26. [國小益智題]原本表面積和 $= 6 + 24 + 54 = 84$ ，最多可扣掉

$$2 \times 4 + 2 \times 2 \times 1 = 12$$

27. [高一]寫出幾個 4 的偶數次方來觀察一下，可以發現十位數也會循環。每五個一個循環，(16,56,96,36,76)，所以這題就是 36。

28. [高一]可能 $n = a^{3b}$ ，故因數個數為 $3b+1$ ，選(C)

29. [高三]線性規劃，角點有(2,0)(1,1)(3,3)，最小值就是 3

30. [國三]很難的國三，應該是某年 TRML 還是 JHMC。

$$\text{令 } D(s,s), C(t,t), A(s,s^2), B(t,t^2), s - s^2 = t - t^2 \Rightarrow s + t = 1, t = 1 - s$$

$$\text{又 } s - s^2 = \sqrt{2}(t - s) = \sqrt{2}(1 - 2s) \Rightarrow s^2 - (2\sqrt{2} + 1)s + \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{(2\sqrt{2} + 1) \pm 3}{2} = \sqrt{2} + 2, \sqrt{2} - 1 (\sqrt{2} + 2 \text{ 不合}) \Rightarrow s + s^2 = 2 - \sqrt{2}$$