

97 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟

國中數學科試題

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

- 《幾何原本》(Elements)的作者為
①阿基米得(Archimedes) ②歐基里德(Euclid) ③歐拉(Euler) ④柏拉圖(Plato)。
- 何謂「算術基本定理」(Fundamental Theorem of Arithmetic)?
①質數有無窮多個 ②每一個大於 1 的自然數都可唯一表示成質數的乘積 ③每一個大於 2 的偶數都可表示成兩個質數的和 ④兩相異質數彼此互質。
- 一個含有單變數 x 的三次實係數多項式可能有多少個實根?(重根需以其重覆的次數來計算)
①3 ②1 或 3 ③1,2,或 3 ④0,1,2,或 3。
- $e^{\pi i} = ?$
①1 ②-1 ③ i ④ $-i$ 。
- 設 $f(x) = (a+1)x^2 + (b-1)x + c$ ，已知 $f(-3) = f(2) = f(9) = 4$ ，則 $a+b+c = ?$
①0 ②1 ③2 ④4。
- 在二維平面上， $x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$ 的圖形為何?
①圓 ②橢圓 ③拋物線 ④雙曲線。
- 若 $(42823, 6409) = a$ ， $(963, 657) = b$ ，則 $a+b = ?$
①24 ②25 ③26 ④27。
- 當 n 逼近正無窮大時， $(1 - \frac{1}{n})^n$ 的值逼近下列何者?
①0 ② e ③ e^{-1} ④不存在 (e 為 Euler's constant 2.71828...)。
- 設 $A(-2,1)$ ， $B(-2,4)$ ，已知點 C 、 D 在直線 $y = x - 6$ 上，且 \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於原點，試問 \overline{CD} 的長度為何?
①2 ② $2\sqrt{2}$ ③3 ④ $2 + \sqrt{2}$ 。
- 在三角形 ABC 中， D 為 \overline{BC} 的中點，已知 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AC} = 2$ ，且 $\overline{AD} = 2\overline{BD}$ ，則 $\overline{AD} = ?$
① $\sqrt{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ 。
- 若 $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ ，則 $\sin x + \cos x = ?$
①1 ②-1 ③0 ④1 或 -2。
- 令 $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}$ ， $B = \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000}$ ，則下列何者正確?
① $A = B$ ② $A > B$ ③ $A < B$ ④無法判定。
- 設 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 為方程式 $2x^2 + 4x + k = 0$ 之二根，則 $k = ?$
①3 ②4 ③5 ④6。
- 某網球單打比賽，規定每位選手必須和所有其它選手各比賽一場，賽程總共為 91 場，則選手人數為幾人?
①13 ②14 ③15 ④16。
- 設 $a = \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt[4]{24}$ ， $c = \sqrt[3]{11}$ ，則三數大小關係為何?
① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > a > c$ ④ $c > a > b$ 。
- 以下有關加法群 Z_n 的敘述何者錯誤?
① $Z_{105} \cong Z_5 \times Z_{21}$ ② $Z_{105} \cong Z_7 \times Z_{15}$ ③ $Z_9 \cong Z_3 \times Z_3$ ④對於每一個正整數 n ， Z_n 皆為交換群。
- 令 a, b 為正整數，滿足 $(a, 4) = 2$ 且 $(b, 4) = 2$ ，則 $(a+b, 4) = ?$
①2 ②1 ③4 ④6。
- 令 a, b 為正整數，滿足 $(a, b) = 2$ 且 $[a, b] = 136$ ，則 $ab = ?$
①408 ②544 ③136 ④272。
- A 和 B 為 n 階方陣， $\det(A)$ 表示 A 的行列式值，以下敘述何者錯誤?
①若 $\det(A) = 0$ ，則 A 的反矩陣不存在 ②若 D 為 A 的轉置矩陣(transpose)，則 $\det(A) = \det(D)$ ③ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ④ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ 。
- 設 T 為從 R^2 映至 R^3 的線性轉換(linear transformation)，已知 $T([-1, 2]) = [-2, 1, 0]$ 且 $T([3, -5]) = [5, -7, 1]$ ，則 $T([-4, 3]) = ?$
① $[-3, 24, -5]$ ② $[0, -9, 2]$ ③ $[-1, -4, 1]$ ④ $[23, -17, 3]$ 。
- 令 $T: V \rightarrow W$ 為線性轉換(Linear Transformation)且為映成(onto)。令 $\dim(V) = m$ ， $\dim(W) = n$ ，則 $\dim(\text{Ker}(T)) = ?$
① $m - n$ ② $n - m$ ③ $m + n$ ④以上皆非。
- 令 $V = \{p(x) | p(x) \text{ 為實係數多項式, 且 } \deg(p(x)) \leq 3\}$ ，則 $\dim(V) = ?$
①3 ②4 ③5 ④2。

23. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d & 1 \end{pmatrix}$ ，則 $\det(A)$ (A 的行列式值) = ?
 ① 1 ② 0 ③ ab ④ c 。
24. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \\ 8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$ ，則矩陣 A 的所有特徵值的和為
 ① 8 ② 16 ③ 24 ④ -10。
25. 設 H 為一個群(group)， $|H|$ 代表 H 的元素個數。以下敘述何者錯誤？
 ① 若 $|H|=2$ ，則 H 必為循環群(cyclic group) ② 若 $|H|=3$ ，則 H 必為循環群 ③ 若 $|H|=4$ ，則 H 必為循環群 ④ 若 $|H|=5$ ，則 H 必為循環群。
26. A 為 4 列 5 行的矩陣，其行向量依序為 $[1, 0, 3, 2]$ 、 $[3, -2, 11, 5]$ 、 $[0, 4, -4, 3]$ 、 $[-1, -2, -1, -4]$ 、 $[2, 0, 6, 0]$ ，試問 A 的行空間(column space) 的維度(dimension)為何？
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4。
27. 40^{255} 除以 13 的餘數為
 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 1。
28. (A) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ (B) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ (C) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \cdots$ 以上四個無窮級數何者收斂？
 ① (C) ② (A)(C) ③ (C)(D) ④ 全部皆發散。
29. 令 $F(x) = \int_2^{x^2} \cos t \, dt$ ，則 $F'(x) = ?$
 ① $\cos(x^2)$ ② $2x \cos(x^2)$ ③ $\cos(x^2) - \cos 4$ ④ $2x \cos(x^2) - 4 \cos 4$ 。
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$
 ① 0 ② 1 ③ -1 ④ 不存在。
31. 令 $f(x) = 3^{x^2}$ ，則 $f'(x) = ?$
 ① 3^{x^2} ② $(\ln 3)x^2 \cdot 3^{x^2}$ ③ $x^2 \cdot 3^{x^2-1}$ ④ $2x(\ln 3) \cdot 3^{x^2}$ 。
32. 令 R 為 $y = 4 - x^2$ 與 $y = 0$ 所圍成的區域， R 繞著 y 軸旋轉所得的體積為何？
 ① 2π ② 4π ③ 8π ④ 16π 。
33. $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = ?$
 ① 4 ② 3 ③ 6 ④ 5。
34. 求級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} (x-2)^n$ 的收斂半徑？
 ① 5 ② 3 ③ 4 ④ 2。
35. 曲線 $y = \sin x$ ， $0 \leq x \leq \pi$ ，與 x 軸所圍部分對 y 軸旋轉，則旋轉體體積為
 ① 2π ② $2\pi^2$ ③ π^2 ④ $3\pi^2$ 。
36. 曲線 $y = -x^2 + 4x - 3$ 與 x 軸在第一象限所圍成之面積為何？
 ① 1 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{4}{3}$ 。
37. $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx = ?$
 ① $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ ② $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$ ③ $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$ ④ $\frac{1}{4}(e^4 + 1)$ 。
38. 令 $R = \{(x, y) | 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ ，求 $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dR = ?$
 ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π 。
39. $\frac{d}{dx} x^x = ?$
 ① x^x ② $x^x \ln x$ ③ $x^x (\ln x + 1)$ ④ $x^x (\ln x - 1)$ 。
40. 函數 $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^3$ 在點 $(1, -1, 2)$ 處的最大方向導數為
 ① $\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{61}$ ③ 4 ④ -4。
41. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = ?$
 ① ∞ ② $-\infty$ ③ 0 ④ 1。

42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = ?$

- ① $\ln 2$ ② 0 ③ ∞ ④ 1 。

43. 令 $f(x) = x^3 - 2$, 則 $(f^{-1})'(6) = ?$

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{8}$ 。

44. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx = ?$

- ① $2 \ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 2$ ④ $2 \ln 3$ 。

45. 令 $f(x, y) = xe^y - \sin \frac{x}{y} + x^3 y^2$, 則 $f_x(0, 1) = ?$

- ① e ② $e+1$ ③ $e-1$ ④ 0 。

46. $y'' + 5y' + 6y = 0$ 的通解(general solution)為

- ① $c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$ ② $c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ ③ $c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$ ④ $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$ 。(其中 c_1, c_2 為常數)

47. 擲兩顆公正的骰子，擲出 10 點的機率為何？

- ① $1/36$ ② $2/36$ ③ $3/36$ ④ $4/36$ 。

甲、乙、丙三射手之命中率分別為 $4/5$ 、 $3/4$ 、 $2/3$ 。今三人同打一靶，各發一彈，試回答以下兩個問題。

48. 僅有甲命中的機率為何？

- ① $1/15$ ② $1/20$ ③ $1/30$ ④ $3/20$ 。

49. 恰有兩人命中的機率為何？

- ① $1/5$ ② $2/15$ ③ $1/10$ ④ $13/30$ 。

50. 從一正立方體的 8 個頂點中任取三點可連成三角形，試問這些三角形中有幾個是正三角形？

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 。

97 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟

國中數學科標準答案

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
答案	②	②	②	②	④	②	③	③	②	④
題號	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
答案	①	①	送分	②	②	③	③	④	④	①
題號	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
答案	①	②	④	③	③	③	④	①	②	②
題號	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
答案	④	③	①	④	②	④	③	②	③	②
題號	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
答案	④	①	③	③	③	①	③	①	④	③

97 中區略解

1. [常識]不知道誰抄誰，一樣是歐幾里得。
2. [常識]③是哥德巴赫猜想。
3. [高一]其實就是代數基本定理的應用，實係數多項式，虛根必共軛成對，所以實根要嘛就三個，要嘛就一個。
4. [也是常識]出現過很多次的尤拉公式。 $e^{\pi} + 1 = 0$
5. [國三]由所提供的線索可知 $f(x) = 4 \Rightarrow a = -1, b = 1, c = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$ 。
6. [高二]配方後， $(x-2)^2 + 3(y+1)^2 = 6$ ，很明顯的橢圓。
7. [國一] $a = 17, b = 9, a + b = 26$
8. [微積分] $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = [\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^{-n}]^{-1} = e^{-1}$
9. [國一]畫圖可知， $C(4, -2), D(2, -4)$ ，故 $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$
10. [高二]令 $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 2x$ ，由中線公式： $(2x)^2 + (4x)^2 = 2(1^2 + 2^2)$ ，

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2x = \sqrt{2}$$
11. [高一] $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1$ ，再將答案代進來，只有①可以。
12. [國一]競賽題， $A = \sum_{k=1}^{2000} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2000} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} = B$
13. [送分]
14. [高二] $C_2^n = 91, n = 14$
15. [高一]
$$\begin{cases} a^{12} = 5^6 = 15625 \\ b^{12} = 24^3 = 13824 \Rightarrow a > c > b \\ c^{12} = 11^4 = 14641 \end{cases}$$
16. [群論]不會。
17. [國一]可令 $a=4m+2, b=4n+2, a+b=4(m+n+1)$ ，故 $(a+b, 4)=4$
18. [國一] $ab=(a,b)[a,b]=272$
19. [線代]④取 $A=I, B=-I$ ，就可得到是錯誤的。
20. [線代] $(-4, 3) = -11(-1, 2) - 5(3, -5)$
 $\Rightarrow T([-4, 3]) = -11T([-1, 2]) - 5([5, -7, 1]) = [-3, 24, -5]$
21. [線代]定義題， $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(V) - \dim(W) = m - n$
22. [線代]今年南區也有考，改成複係數。因為 V 可能有 (x^3, x^2, x^1, x^0) ，所以 4。
23. [線代]可以用列運算把 a, b, d 都消掉，所以行列式值剩下主對角線乘積 $= c$ 。
24. [線代]所求 $= \text{Tr}(A) = 4 + 4 + 16 = 24$ 。
25. [群論]元素個數為質數的群，必為循環群。所以剩下③不是循環群。

26. [線代]慢慢化簡，會剩下三個。
27. [國一] $40^{255} \equiv 1^{255} \equiv 1 \pmod{13}$
28. [微積分](A)交錯級數，且 $|r|=1$ ，發散。(B)p 級數，且次數為 1，發散。(C)

值為 $\ln 2$ 收斂。(D) p 級數，且次數為 $\frac{1}{2}$ ，發散。

29. [微積分]又是第二定理的應用， $F'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

30. [微積分]很重要的基礎。值為 1。

31. [微積分]套公式 $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x^2} \cdot 2x$ 。

32. [微積分－積分應用] $V = \pi \int_0^4 [f(y)] dy = \pi \int_0^4 (4-y) dy = 8\pi$

33. [微積分－定積分]先去絕對值，而成 $2 \int_0^\pi \sin x dx = 2(-\cos x) \Big|_0^\pi = 4$

34. [微積分－收斂半徑] $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln n}{2^n}}{\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}} \right| = 2$

35. [微積分－積分應用]這題我用 pappus 定理， $A = \int_0^\pi \sin x dx = 2$ ， $r = \frac{\pi}{2}$ ，

$$V = A \cdot 2\pi r = 2\pi^2$$

36. [微積分－定積分]兩方程交於(1,0)與(3,0)，且拋物線圖形在 x 軸上面，

$$\int_1^3 [(-x^2 + 4x - 3) - 0] dx = \frac{4}{3}$$

37. [微積分－重積分]積分區域如右圖中三直線圍成三角形部分

變換積分順序，則 $x: 0 \rightarrow \frac{y}{2}, y: 0 \rightarrow 2$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2} dx dy = \int_0^2 \frac{ye^{y^2}}{2} dy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{4} (e^4 - 1)$$

38. [微積分－變換變數] 積分區域如右圖中白色部分，

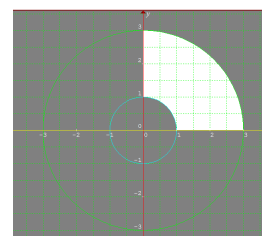
變換積分，則 $r: 1 \rightarrow 3$, 角度: $0 \rightarrow \pi/2$

$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dR = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 \frac{1}{r} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 d\theta = \pi$$

39. [微積分－微分技巧]也算常考了，用背的比較快，答案是③。

40. [微積分－多變數函數] $\nabla f = (2xy^3z^3, 3x^2y^2z^3, 3x^2y^3z^2)$

將(1, -1, 2)代入，得 $\nabla f = (-16, 24, -12)$ ，則 $|\nabla f| = \sqrt{976} = 4\sqrt{61}$



41. [微積分]就 30 題所講的基礎的變形應用，把 x 改成倒數而已，值為 1。
42. [微積分]參考 12 題，因此本題等價於 28 題②，也就是 $\ln 2$ 。
43. [微積分—反函數]算是微積分常考的類型了， $f(2)=6$ ，令 g 為 f 的反函數。

$$\text{則 } g'(6) \cdot f'(2) = 1, \text{ 又 } f'(2) = 12 \Rightarrow g'(6) = \frac{1}{12}$$

44. [微積分—三角代換]令 $u = 1 + \tan x, du = \sec^2 x dx \Rightarrow$ 原式 $= \int_1^2 \frac{1}{u} du = \ln|u| \Big|_1^2 = \ln 2$

45. [微積分—偏微分] $f_x(0,1) = (e^y - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} + 3x^2 y^2) \Big|_{(0,1)} = e - 1$

46. [微積分—常微分方程]知道公式，就可以得到答案是①

47. [國三]有(4,6)(5,5)(6,4)三種，所以 $\frac{3}{36}$

48. [國三] $\frac{4}{5} \times (1 - \frac{3}{4}) \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{15}$

49. [國三] $\frac{4 \times 3 \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + 4 \times 1 \times 2}{5 \times 4 \times 3} = \frac{26}{60} = \frac{13}{30}$

50. [高二]假設該立方體邊長為 1，將其中一個頂點定為(0,0,0)，則(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)這三點會形成正三角形。八個頂點可以輪流成為原點，所以總共八個。