桃園縣 98 年國民中學新進教師甄選【專門科目：數學】試題卷

※注意事項：1. 答案一律畫在答案卡上，如寫在試題卷上不予計分。
2. 作答完畢，請將試題及答案卡一併交回。
3. 本試題共二頁。

一、單一選擇題：請依照題意，從四個選項中選出一個正確或最佳的答案(共25題，每題4分，合計100分)

1. 設n為一個四位數，並設q、r分別為n除以 1000 的商數及餘數。試問有多少個n值使得$q+r$可被 37 整除？
① 5
② 24
③ 243
④ 270

2. 某甲在提款時忘記帳號的密碼，但還是記得密碼的四位數字中有兩個 5、一個 2、一個 6，於是他就用這四個數字排成一個四位數輸入提款機嘗試，試問他只試一次就成功的機率為
① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{24}$

3. 底面半徑為 2、高為 8 的直圓柱面上有一條螺旋線，剛好沿著圓柱側面繞圓柱 4 圈從下底面上升到上底面，試問此螺旋線有多長？
① $16\pi+8$
② $\sqrt{256\pi^2+64}$
③ $32\sqrt{5}$
④ 128π

4. 設$x=\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{12}}}$，求$\log_{16}(2x^4+x^2-5x+2)$之值為？
①$\frac{1}{2}$
②$\frac{1}{4}$
③2
④4

5. 已知$1+i$為方程式$2x^3-5x^2+6x-2=0$之一根，則此方程式其餘之根的和為何？（$\sqrt{-1}=i$）
①$2+i$
②$\frac{1}{2}+i$
③$\frac{3}{2}-i$
④$2-i$

6. 設方程式 $x^8+a_7x^7+a_6x^6+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$之解集合為$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，求$a_6=$?
①546
②586
③642
④648

7. 若7^x為500!的因數，則 x 之最大值為何？
① 71
② 72
③ 81
④ 82

8. 令 $P(\overline{B})=1-P(B)$，已知 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$。求$P(A|\overline{B})$=?
①$\frac{4}{15}$
②$\frac{5}{8}$
③$\frac{8}{15}$
④$\frac{3}{8}$

9. 若 $\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{5}{n^3}+\cdots+\frac{n^3-5}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3}=60$，則正整數$n$為
① 5
② 11
③ 31
④ 60

10. 設a為整數且$\frac{5a+7}{3a+2}$也是整數，則a的所有可能值的和為?
① 0
② 1
③ 2
④ 3

11. 滿足方程式$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{15}$且$1<x<y$的正整數解$(x,y)$，共有多少組？
① 1 組
② 2 組
③ 3 組
④ 4 組

12. 設$\sin\cot^{-1}\sqrt{3}=\tan\cos^{-1}\sqrt{x}$，則$x=$?
①$\frac{2}{3}$
②$\frac{4}{5}$
③$\frac{\sqrt{3}}{2}$
④$\frac{1}{2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n+1}}$ =？

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② 1

③ $2\sqrt{2}$

④ 2

14. 設 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2n+1}=2$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-a_n}{2n-5}=$？

① -1

② 0

③ 1

④∞

15. 從一長方形的角切掉一三角形得到一個五邊形，其邊長由小至大排分別為 8、10、13、15、20 單位。這五邊形的面積為何？

① 252.5

② 260

③ 270

④ 275.5

16. $f(x)=1+|\ln x|$ 在區間 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 上的最大值與最小值的和為

① $2+\ln 2$

② $1+\ln 2$

③ $1+\ln\frac{3}{2}$

④ $2+\ln 3$

17. k 為一實數。若方程式 $2x^2+2kxy+3y^2+5x+4y+6=0$ 代表一雙曲線，則

① $k=\sqrt{6}$

② $k<\sqrt{6}$

③ $k<-\sqrt{6}$ or $k>\sqrt{6}$

④ $-\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

18. 求 $\sum_{k=1}^{100}\cos\frac{k\pi}{4}=$

① 0

② 1

③ -1

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. $\int_0^{\pi}e^{2x}\cos x\,dx$ 之值為

① $-(e^{2\pi}-1)$

② $-\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)$

③ $-\frac{2}{5}(e^{2\pi}-1)$

④ $-\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$

20. 兩曲線 C_1, C_2 的距離為 C_1 上的點與 C_2 上的點的距離的最小值。則拋物線 $y^2=4x$ 及圓 $x^2+y^2-4x+3=0$ 之距離為何？

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

21. 試問下列關於正 20 面體的敘述，哪一個是錯誤的？

①有 12 個頂點

②它的所有頂點會共球面

③以它的頂點為頂點可以產生 15 個黃金矩形

④可以用 20 個正四面體面與面黏合成正 20 面體

22. 通過橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上兩點 $(0,-4),(\frac{5\sqrt{3}}{2},2)$ 的直線 L，將橢圓內部分割成兩個區域，試問較小區域的面積為

① $\frac{20\pi}{3}$

② $\frac{25\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{20\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{20\pi}{3}-5\sqrt{3}$

23. 設 $P(x,y,z)$ 為 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 上的點，則 $x-2y+2z+2$ 之最大值為何？

① 3

② 9

③ 15

④ 21

24. 設 $A=\{2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{8,9,10\}$，$C=\{11,12\}$。投擲二枚公正的六面骰子一次，若出現的點數和屬於 A，則玩家可獲得 3 元，若出現的點數和屬於 B，則玩家可獲得 4 元，若出現的點數和屬於 C，則玩家可獲得 11 元。假使此一為公平的遊戲，則玩家玩一次遊戲該付多少錢給莊家？

① 4 元

② 5 元

③ 6 元

④ 9 元

25. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，求 A^{50}=?

① $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

桃 園 縣 98 年 國 民 中 學 新 進 教 師 甄 選

【 專 門 科 目 ： 數 學 】 試題答案

一、選擇題：（共 25 題, 每題 4 分）									
1	③	2	③	3	②	4	①	5	③
6	①	7	④	8	①	9	①	10	③
11	④	12	②	13	①	14	①	15	③
16	①	17	③	18	③	19	④	20	①
21	④	22	④	23	④	24	①	25	②

98 桃園縣略解

1. [國一] $n=1000q+r=999q+(q+r)\Rightarrow 37\mid(q+r)$ ，等價於四位數中，有幾個 37 的倍數，故 $\left[\dfrac{10000}{37}\right]-[\dfrac{1000}{37}]=270-27=243$

2. [高二] $\dfrac{1}{\frac{4!}{2!}}=\dfrac{1}{12}$

3. [國三]理化裡面的斜面，攤開後，會形成一個直角三角形，其中一股為 8，另一股為 $4\times 2\pi\cdot 2=16\pi$ ，所求為斜邊長＝$\sqrt{8^2+(16\pi)^2}$

4. [高一] $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\Rightarrow 2x^2-2x-1=0$ ，
又 $2x^4+x^2-5x+2=(2x^2-2x-1)(x^2+x+2)+4$
故 $\log_{16}(2x^4+x^2-5x+2)=\log_{16}4=\dfrac{1}{2}$

5. [高一] 利用根與係數 $\Rightarrow$ 另兩根和為 $\dfrac{3}{2}-i$

6. [高二]今年好像也有考類似的，$a_6=\dfrac{(\sum_{n=1}^{8}n)^2-\sum_{n=1}^{8}n^2}{2}=\dfrac{1296-204}{2}=546$

7. [高一]用高斯公式，$[\dfrac{500}{7}]+[\dfrac{500}{49}]+[\dfrac{500}{343}]=82$

8. [高一] $P(\overline{B})=\dfrac{1}{2},P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{4}{15}$

9. [高一] $\dfrac{\frac{(3+n^3-3)(n^3-5)}{n^3}}{2}=60,n^3-5=120,n=5$

10. [高一] $a\in Z,$ 且 $\dfrac{5a+7}{3a+2}\in Z\Rightarrow\dfrac{15a+21}{3a+2}\in Z\Rightarrow\dfrac{11}{3a+2}\in Z\Rightarrow a=3,-1$

11. [高一]強迫因式分解的老梗，可以化解成為 $(2x-15)(2y-15)=225$
又 $x>y,2x-15>2y-15,225=225\times1=75\times3=45\times5=25\times9$ ，故有四組。

12. [高一] $\cot^{-1}\sqrt{3}=30°,\sin 30°=\dfrac{1}{2},$ 令 $\cos^{-1}\sqrt{x}=\theta,\cos\theta=\sqrt{x}$
又 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{x}\Rightarrow x=\dfrac{4}{5}$

13. [高一]有理化之後，分項對消，剩下 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

14. [微積分]可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4n$ ，代入後得到所求值＝－1。

15. [國二]需要想一下，等於一個長為 20，寬為 15 的長方形，切掉一個(5,12,13)的直角三角形，面積＝300－30＝270

16. [微積分]極小值在 x=1，值為 1，極大值在 $x=\frac{1}{2}$, 值為$1+\ln 2$ 。

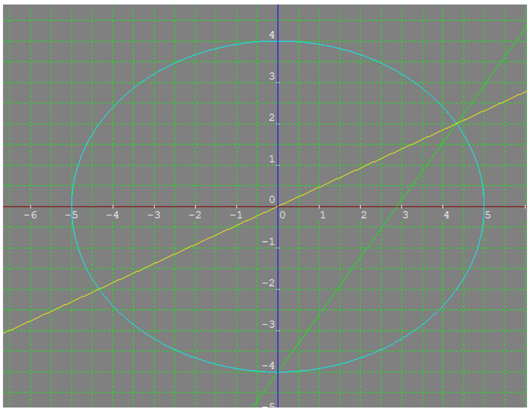
17. [高二]雙曲線 $(2k)^2-4\times 2\times 3>0, k>\sqrt{6} or k<-\sqrt{6}$

18. [高一]每八個和為 0，所求＝ $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=-1$

19. [微積分－分部積分]這種形式都要做兩次，一定得到原來的積分式，再移項才能解出所求的值。以這題而言，會得到 $5\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=-2e^{2\pi}-2$ 。

20. [高二]因兩者有相同的對稱軸，故最小值必發生在對稱軸上，也就是 $y=0$
$\Rightarrow$ (0,0)到(1,0)距離為1

21. [高二]前三個裡面有兩個跟 97 基隆 38 題一樣，第四個很明顯的錯，把兩個正四面體黏起來，其兩面角不可能與正二十面體一樣。



22. [高二]由橢圓的參數式可以知道，(0,－4)的角度是 270 度， $(\frac{5}{2}\sqrt{3},2)$ 的角度是 30 度。如右上角圖，所求面積＝ $\frac{1}{3}$ 橢圓－黃綠藍圍成的三角形 。
$=\frac{1}{3}\times 5\times 4\pi-\frac{1}{2}\times 4\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{20}{3}\pi-5\sqrt{3}$

23. [高二]科西不等式， $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4^2$ ，
$144=[1^2+(-2)^2+2^2][(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2]\geq(x-2y+2z-7)^2$
$12\geq x-2y+2z-7\geq -12\Rightarrow 21\geq x-2y+2z+2\geq -3$ ，所求為 21。

24. [高二]期望值＝ $3\times\frac{21}{36}+4\times\frac{12}{36}+11\times\frac{3}{36}=4$

25. [線代]可得 $A^6=I, A^{50}=A^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$