

臺北縣 98 學年度國民中學正式教師暨教育部 98 學年度國中增置

專長教師方案聯合甄選試題

科目：數學科

— 考生作答說明 —

- 一、請核對答案卡科目、准考證號碼是否與准考證內容相符，如果不符，請立即向監試人員反應。
- 二、題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
- 三、請使用黑色2B鉛筆於「答案卡」上畫記作答，切勿使用修正液(帶)，以免無法判讀。
- 四、答案卡與試卷須一起繳交，始可離開試場。
- 五、請務必填上准考證號碼。

准考證號碼：_____

科目：數學科

選擇題：共 40 題，每題 2.5 分，共 100 分

- (D) 1. 已知數列 $\{b_n\}$ 滿足 $b_1 = c, b_2 = d, b_{n+1} = b_n - b_{n-1} (n \geq 2)$ ， S_n 為其前 n 項的和，則下列何者正確？
(A) $b_{100} = d, S_{100} = c + d$ (B) $b_{100} = -c, S_{100} = d$
(C) $b_{100} = -d, S_{100} = d - c$ (D) $b_{100} = -c, S_{100} = 2d - c$
- (D) 2. 設等差數列 $\{a_n\}$ 滿足 $3a_8 = 5a_{13}$ ，且 $a_1 > 0$ ， S_n 為其前 n 項的和，則下列哪一個 S_n 最大？
(A) S_8 (B) S_{10} (C) S_{11} (D) S_{20}
- (A) 3. 2009^{98} 除以 5 的餘數為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (D) 4. $(-10) \div 3$ 的餘數為何？
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
- (A) 5. 若方程式 $f(x) = ax^4 + bx^2 + 2x + 3$ ，且 $f(2) = 4$ ，則 $f(-2) = ?$
(A) -4 (B) 0 (C) 2 (D) 4
- (D) 6. 求函數 $f(x) = |x+1| + |x-1| + |x-2|$ 的最小值為何？
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- (C) 7. 若 α 、 β 是方程式 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 之兩根，則 $\frac{1}{(\alpha+2)^2} + \frac{1}{(\beta+2)^2} = ?$
(A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) -3
- (C) 8. 已知 k 為整數，若 x 的二次式 $x^2 + kx - 12$ 能分解成兩個整係數一次因式的乘積，則符合條件的 k 的有幾個？
(A) 1 個 (B) 3 個 (C) 6 個 (D) 12 個
- (B) 9. 若 $f(x) = ax^2$ ，且 x 在 $-2 \leq x \leq 3$ 的範圍中之最小值為 -36，則 $a = ?$
(A) 9 (B) -4 (C) -9 (D) 無解
- (C) 10. 方程式 $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 1$ 有幾組正整數解？
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 無限多組
- (A) 11. 設 $2x : y = 7 : 2$ ， $2y : 5z = 8 : 15$ ，則 $\frac{z}{x+y} = ?$
(A) $\frac{3}{11}$ (B) $\frac{16}{33}$ (C) $\frac{21}{44}$ (D) $\frac{5}{9}$

- (C) 12. 有位學生在解不等式 $\frac{4}{x-2} > 5$ 時，雖然解法正確，但卻抄錯題目中的數字 5，得到錯誤的答案為 $2 < x < 4$ ，請問此學生將數字 5 抄為下列哪一個數字？

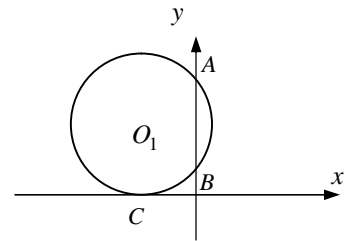
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 此題無解

- (A) 13. 若三相異直線 $L_1: x - y = -1$ ， $L_2: x + 2y = 5$ ， $L_3: 3x + ky = 13$ 將平面分割成六個區域，則 k 的值不可為何？

(A) 2 (B) -3 (C) 5 (D) 6

- (A) 14. 如右圖，圓 O_1 與 y 軸交於 A 、 B 兩點，與 x 軸交於 C 點且 C 點在原點的左邊。已知 P 點在 x 軸上移動，且在 C 點的左邊。若 P 點愈向右邊移動，則 $\angle APB$ 的度數有何變化？

(A) 愈大 (B) 不變
(C) 愈小 (D) 無規則

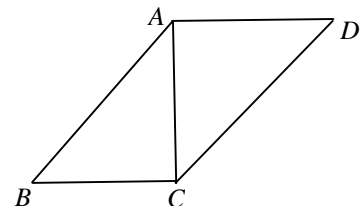


- (B) 15. $\sum_{k=1}^5 (-1)^{k-1} 2k = ?$

(A) -6 (B) 6 (C) -22 (D) 22

- (C) 16. 如右圖，已知 $\angle BCA = \angle CAD = 90^\circ$ ， $\angle ABC = \angle ACD = 47^\circ$ ，則下列何者正確？

(A) $\overline{AD} = \overline{BC} > \overline{AC}$ (B) $\overline{AD} = \overline{BC} < \overline{AC}$
(C) $\overline{AD} > \overline{AC} > \overline{BC}$ (D) $\overline{AD} > \overline{BC} > \overline{AC}$

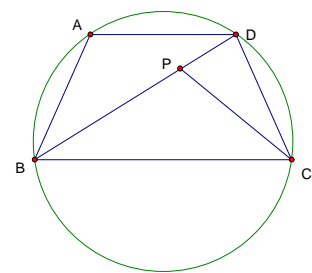


- (D) 17. 如右圖，圓內接四邊形 $ABCD$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle ABP = \angle BCP$ ，則

(甲) $\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{BD} \cdot \overline{BP}$ ，(乙) $\triangle BCD \sim \triangle CPD$
(丙) $\overline{CD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{PD}$

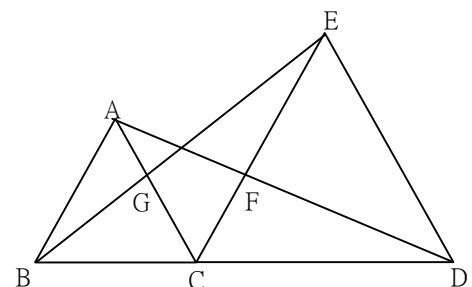
請問(甲)，(乙)，(丙)三個推論中有幾個正確？

(A) 0 個 (B) 1 個
(C) 2 個 (D) 3 個

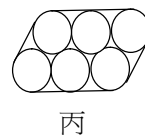
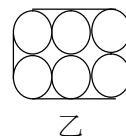
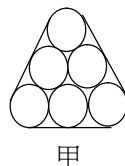


- (A) 18. 如右圖， C 是 \overline{BD} 上的點，以 \overline{BC} 、 \overline{CD} 為邊在 \overline{BD} 同側作正 $\triangle ABC$ 和正 $\triangle ECD$ ， \overline{AD} 交 \overline{CE} 於 F ， \overline{BE} 交 \overline{AC} 於 G ，則下列何者正確？

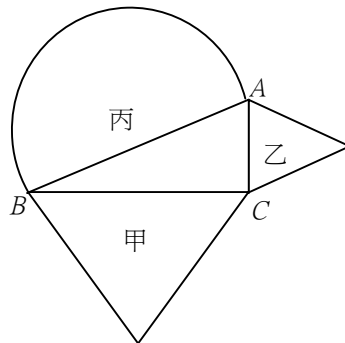
(A) $\overline{CG} = \overline{GF}$ (B) $\overline{CG} > \overline{GF}$
(C) $\overline{CF} > \overline{GF}$ (D) $\overline{CG} > \overline{CF}$



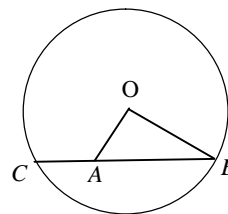
- (D) 19. 下面有 18 罐罐頭，將它們分成 3 等分後，再分別用繩子把它們四周綁起來，如右圖所示，請問甲，乙，丙三種綁法，哪一種綁法所用的繩子最短？
- (A) 甲 (B) 乙
(C) 丙 (D) 這三種綁法一樣長



- (B) 20. 直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，分別以 \overline{BC} ， \overline{AC} 為邊長作正三角形，其面積分別為甲、乙，以 \overline{AB} 為直徑作半圓，其面積為丙，如右圖，則下列何者正確？
- (A) $\text{甲}^2 + \text{乙}^2 = \text{丙}^2$ (B) $\text{甲} + \text{乙} > \text{丙}$
(C) $\text{甲} + \text{乙} < \text{丙}$ (D) $\text{甲} + \text{乙} = \text{丙}$



- (D) 21. 如右圖， \overline{BC} 為圓 O 的一弦， A 為 \overline{BC} 上一點，連接圓心 O ，且知 $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\overline{AO} = \sqrt{11}$ ， $\overline{BO} = 5$ ，則 $\overline{AC} = ?$
- (A) $\frac{11}{6}$ (B) 2
(C) $\frac{13}{6}$ (D) $\frac{7}{3}$



- (D) 22. 若某班共有 36 名學生，從中選出兩人恰好都是女生的機率為 $\frac{1}{3}$ ，則此班中女生的人數為何？
- (A) 12 人 (B) 16 人 (C) 18 人 (D) 21 人

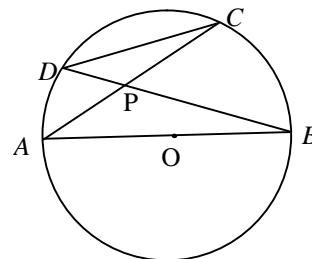
- (C) 23. 若 $A = \{1, 2, x\}$ ， $B = \{1, x^2\}$ ，且 $A \cup B = \{1, 2, x\}$ ，則 x 有幾個不同的值？
- (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個

- (B) 24. 若 $f(x)$ 為偶函數，且 $x > 0$ 時， $f(x) = x(2-x)$ ，則當 $x < 0$ 時， $f(x) = ?$
- (A) $x(2+x)$ (B) $-x(2+x)$ (C) $x(2-x)$ (D) $-x(2-x)$

- (C) 25. $(x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1) + 1 = ?$
- (A) 1 (B) -1 (C) x^4 (D) $-x^4$

- (B) 26. 方程式 $25^x - 5^x - 6 = 0$ 有幾個實根？
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

- (C) 27. 已知兩直線 L_1 、 L_2 分別為 $y = m_1x + 3$ 、 $y = m_2x + 2$ ，且 L_1 與 L_2 的交點在 y 軸的左側，則下列何者正確？
 (A) $m_1 + m_2 = 0$ (B) $m_1 = m_2$ (C) $m_1 > m_2$ (D) $m_1 < m_2$
- (D) 28. 若 $\log_a \frac{2}{3} < 1$ ，則 a 的範圍為何？
 (A) $a > \frac{2}{3}$ (B) $0 < a < \frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3} < a < 1$ (D) $0 < a < \frac{2}{3}$ 或 $a > 1$
- (A) 29. 若 m 與 n 都為正整數，有幾個數對 (m, n) 滿足 $mn(m+n) = 12345$ ？
 (A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 9
- (A) 30. 如果複數 $z = a + bi$ ，其中 a, b 是不為 0 的實數，那麼由複數 $z, \bar{z}, z \cdot \bar{z}, |z|, |\bar{z}|, |z|^2, |\bar{z}|^2, |z^2|$ 所構成的集合，最多有幾個元素？
 (A) 4 個 (B) 5 個 (C) 6 個 (D) 7 個
- (B) 31. 若 $f(x) = \sin(x + 20^\circ)$ ，且 $f(30^\circ) = \frac{1}{2} + a$ ， $f(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + b$ ，則 a 與 b 的大小關係為何？
 (A) $a = b$ (B) $a > b$ (C) $a < b$ (D) 不能確定
- (B) 32. 如右圖，已知 \overline{AB} 為圓 O 的直徑，弦 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 P 點，則 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = ?$
 (A) $\sin \angle BPC$ (B) $\cos \angle BPC$
 (C) $\tan \angle BPC$ (D) $\cot \angle BPC$
- (D) 33. 下列哪一個等式錯誤？
 (A) $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$ (B) $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$
 (C) $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$ (D) $\cos(360^\circ - \theta) = -\cos \theta$
- (A) 34. 方程式 $3^x - 2x + 4 = 0$ 有幾個實數解？
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- (C) 35. 設 t 為實數，兩向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (-1, -1)$ ，則 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ 的最小值為何？
 (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
- (B) 36. 如果圓 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 與 x 軸相切於原點，則
 (A) $D = 0, E = 0, F \neq 0$ (B) $D = 0, E \neq 0, F = 0$
 (C) $D \neq 0, E = 0, F = 0$ (D) $D \neq 0, E \neq 0, F = 0$



- (C) 37. 若一橢圓的焦點、頂點分別為雙曲線 $9x^2 - 16y^2 = 144$ 的頂點、焦點，則此橢圓的方程式為何？
(A) $9x^2 + 16y^2 = 144$ (B) $16x^2 + 25y^2 = 144$ (C) $9x^2 + 25y^2 = 225$ (D) $25x^2 + 9y^2 = 225$
- (B) 38. 正方體的 8 個頂點中，取四個構成一個正四面體，則此正方體的表面積與正四面體的表面積比值為何？
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- (D) 39. 若 A、B、C、D 四人排成一列，則 A、B 排在隔壁的機率為何？
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
- (B) 40. $\lim_{x \rightarrow 2009} \frac{x^2 - 2009}{x + 2009} = ?$
(A) 2 (B) 1004 (C) 2009 (D) 4018



98 台北縣略解

1. [高一]遞迴，我都寫到循環出現，每六個一循環， $(c, d, d-c, -c, -d, c-d)$ ，
 $\Rightarrow b_{100} = b_4 = -c, S_{100} = c + d + d - c + (-c - d) = 2d - c$
2. [國二] $3a_8 = 5a_{13} \Rightarrow 2a_1 = -39d$ ，可以撐到 20 項才開始變負。
3. [國一] $2009^{98} \equiv 9^{98} \equiv 1(\text{mod } 5)$
4. [國一]除法原理， $-10 = 3 \times (-4) + 2$
5. [國一] $f(2) = 16a + 4b + 4 + 3 = 4 \Rightarrow 16a + 4b = -3 \Rightarrow f(-2) = 16a + 4b - 4 + 3 = -4$
6. [國一]到數線上 $(-1, 1, 2)$ 三點最近的點， $x=1$ ，距離和為 3。
7. [國二] $\begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{求值式} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 4(\alpha + \beta) + 8}{[\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4]^2} = 3$
8. [國二] $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ ，共 3 種分法，加上負號就 6 種。
9. [國三]若 $a > 0$ ，則最小值應為 0，故 $a < 0$ ， $\Rightarrow 9a = -36, a = -4$
10. [高一]老梗，可化為 $(x-4)(y-2) = 8$ ，8 有 4 個正因數。
11. [國一]易得 $x : y : z = 7 : 4 : 3 \Rightarrow \frac{z}{x+y} = \frac{3}{11}$
12. [國一]設抄成 a ， $\frac{4}{x-2} > a, \frac{4}{a} > x-2$ ，又 $2 > x-2 > 0 \Rightarrow \frac{4}{a} = 2, a = 2$
13. [國一]表三點不共線，亦無兩條平行。所以只剩(A)可以。
14. [國三]圓外角，連 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 交圓於 E, F ， $\angle APB = \frac{1}{2}(AB\text{弧} - EF\text{弧})$ ，當 P 往右移動時，會造成 EF 弧度數變小，使得 $\angle APB$ 變大。
15. [高一]直接寫出來加比較快，答案是 6。
16. [國二]樞紐定理，答案是(C)。
17. [國三]都對。
18. [國三]先證 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，再證 $\triangle FCD \cong \triangle GCE$ ，就可得到 $\overline{CG} = \overline{GF}$ 。
19. [國三]寫一寫就知道都一樣長。
20. [國三]甲 + 乙 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2$ ，丙 = $\frac{\pi}{8} \overline{AB}^2$ ，而 $\frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{\pi}{8}$
21. [國三]延長 \overline{BO} 交圓於 D 點，並連 \overline{CD} ，則 $\triangle OAB \sim \triangle CDB$ ，再去列式計算
 就可得到 $\overline{AC} = \frac{7}{3}$ 。
22. [高二]設女生 x 人， $\frac{C_2^x}{C_2^{36}} = \frac{1}{3}, x = 21$ 。
23. [高一]顯然 $B \subset A \Rightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$

24. [微積分]偶函數， $f(x) = f(-x) = -x(2+x)$
25. [高二]二項式定理，還原回去就成為 $[(x+1)-1]^4 = x^4$
26. [高一]令 $t = 5^x, t > 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0, t = 3, -2$ (不合)
27. [國一]相減， $(m_1 - m_2)x + 1 = 0, x = \frac{1}{m_2 - m_1} < 0 \Rightarrow m_1 > m_2$
28. [高一]分開討論，前提（陷阱）是 $0 < a$ ， $\begin{cases} a < 1, \log_a \frac{2}{3} < 1, a < \frac{2}{3} \\ a > 1, \text{恆成立} \end{cases}$
29. [很難的國一] $12345 = 3 \cdot 5 \cdot 823$ ，湊不出可能的答案。
30. [高二]八個裡面，1,2,(4,5),(3,6,7,8)有這四個元素。
31. [高一]概念題，正弦在第一象限是遞增的，但是增加速度越來越慢，所以 $a > b$ 。
32. [高一]慢慢導也是可以導出來啦，連 OC,OD,從 O 做 CD 的中垂線，大概就夠了。
芭樂招就是讓 A、P、D 三點重疊。秒殺。
33. [高一]基本題，(D)等號右邊多一個負號。
34. [高一]當成一個指數函數跟一條直線有沒有交點會比較好下手。畫圖就知道沒有交點。
35. [高一] $\left| \vec{a} + t\vec{b} \right|^2 = (1-t)^2 + (2-t)^2 = 2t^2 - 6t + 5 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$
36. [高二]按題意，可得圓心在 y 軸上，所以 D=0，通過原點，F=0。但 E≠0。
37. [高二]雙曲線 $\begin{cases} a=4 & 4=c \\ b=3 & \Leftrightarrow 3=b \\ c=5 & 5=a \end{cases}$ 橢圓 $\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 選(C)
38. [高二]令正方體邊長為 1，則表面積為 6，正四面體每面為正三角形，邊長為 $\sqrt{2}$ ，
表面積為 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$ ， $\frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
39. [高二]把 AB 綁起來，再排列。 $\frac{3 \times 2}{4!} = \frac{1}{2}$
40. [微積分??]直接代入，可得 1004。