98 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟

國中數學科試題

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

1. 求 $(1+i)^8=$？
   ① 16　② 8　③ 1　④ 2

2. 令 a,b 為 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ 的特徵值,求 $ab=$？
   ① 5　② 4　③ 2　④ 6

3. 下列何者為 $A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 8 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 11 & 4 & 6\\ 2 & 2 & 4 & 11 & 6\\ 3 & 3 & 6 & 6 & 16\end{pmatrix}$ 的特徵值 ？
   ① 8　② 11　③ 7　④ 5

4. 令 $U=\{(a,b,c,d,e)\in R^5 \mid a=b=c, 且 e=6d\}$，求 $\dim(U)=$？
   ① 2　② 3　③ 4　④ 5

5. 求 $\iint_R (x+y)dA$,其中 R 為一三角形,其三頂點分別為 $(0,0),(0,1),(1,1)$
   ① 1　② $\frac{1}{4}$　③ 2　④ $\frac{1}{2}$

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ 的收斂半徑=？
   ① e　② $2e$　③ 1　④ $\frac{1}{e}$

7. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)(\sin 3x)}{x(\sin 2x)}=$？
   ① 6　② 12　③ 2　④ 8

8. 找出一實數 c 使得 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$
   ① $\ln 3$　② -1　③ $\ln 2$　④ e

9. 求 $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt=$？
   ① ∞　② $-\infty$　③ π　④ 2

10. 求曲線 $x^2+4xy+y^2=13$ 在點 $(2,1)$ 的切線方程式
   ① $y=-4x+9$　② $y=3x-5$　③ $y=-\frac{4}{5}x+\frac{13}{5}$　④ $y=\frac{1}{2}x$

11. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(1+x)-\frac{\pi}{4}}{x}=$？
   ① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ -1　④ 不存在

12. 求 a,b 使得函數 $f(x)=\begin{cases}ax+b & x>2\\ x^3-5x^2+12 & x\le 2\end{cases}$ 在 $x=2$ 可微 (differentiable at x=2)
   ① $a=-8,b=4$　② $a=2,b=3$　③ $a=-8,b=1$　④ $a=-8,b=16$

13. 下列敘述何者為真 ？
   ① 若 A,B 為 R^2 的子空間，則 $A\cap B$ 也是 R^2 的子空間　② 若 A,B 為 R^2 的子空間，則 $A\cup B$ 也是 R^2 的子空間　③ $rank(A+B)$ 小於 $rank(A)$ 或 $rank(B)$　④ 以上皆非

14. 令 $A\in R^{n\times n}$ 且 $A\neq 0, A^4=0$,求 $I+A$ 的反矩陣 =？
   ① $I+A+A^2+A^3$　② $I-A+A^2-A^3$　③ $I+A-A^2$　④ $I+A^3+A^4$

15. 令 $f(x)=10^x$，求 $f'(x)=$？
   ① 10^x　② $x10^x$　③ 9^x　④ $(\ln 10)10^x$

16. 若 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$，求 $f'(0)=$？
   ① 1　② 0　③ e　④ e^{x^2}

17. 在xy平面上，方程式 $x^2-3y^2+4x+5y-6=0$之圖形為

① 橢圓 ② 圓 ③ 雙曲線 ④ 兩條直線

18. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})=$？

① $\frac{1}{2}$ ② π ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1

19. 令$f(x,y,z)=xe^{yz}+ye^{xz}-y^2+3$，求$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h,2,0)-f(-1,2,0)}{h}=$？

① 1 ② 0 ③ -1 ④ 3

20. 求以$(0,0,0),(0,1,1)$與$(1,0,1)$為三頂點的三角形之面積 =？

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$

21. 在平面上，由$4y=x^2$與$x-4y+2=0$二圖形所圍區域之面積 =？

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{3}{8}$

22. $\int_0^1 xe^x dx=$？

① e ② $e-1$ ③ $e+1$ ④ 1

23. 試求$M=4x+y$的最小值，其中x,y的限制條件如下

$$\begin{aligned}3x+y &\geq 6\\ 4x+y &\geq 12\\ x &\geq 2\\ y &\geq 0\end{aligned}$$

① 12 ② 11 ③ 10 ④ 9

24. 解不等式$\log_5(x-1)>\log_{25}(x+3)-\frac{1}{2}$

① $x>3$ ② $x>4$ ③ $x>2$ ④ $x>5$

25. 設 $g(x)=ax^3+\tan^{-1}x$，其中a為常數，已知$g(2)=20$，試求$g(-2)$之值 =？

① -20 ② 10 ③ 30 ④ 20

26. 求拋物線$y=1-x^2$與x軸所圍成區域的面積 =？

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2

27. 令$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求$1+\omega+\omega^2$ =？

① i ② $3i$ ③ 0 ④ $-i$

28. 令a,b的最大公因數$(a,b)=1$，求$(a+b,a-b)$的值 =？

① 1 ② 1或2 ③ 2 ④ 3

29. 令$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -1 & 3\\ 2 & -5 & 4 & -2 & 4\end{pmatrix}$，則$rank(A^T)=$？

① 2 ② 1 ③ 3 ④ 4

30. 令$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ 且其特徵多項式為$p(t)=t^2-3t-4$，試求$A^2-3A-4I_2$ =？

① $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

31. 令 R 為被限制(bounded)在$y=x^2$、$y=0$ 和 $x=1$ 中的區域(region)，試求 R 關於 $x=-1$ 旋轉的旋轉體體積。

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{5}$ ③ $\frac{13\pi}{15}$ ④ $\frac{7\pi}{6}$

32. 令$F(x)=\int_{2x}^{x^2}\sqrt{t^2+1}\,dt$，則$F'(x)$為下列何者？

① $\sqrt{x^2+1}$ ② $\sqrt{x^4+1}$-$\sqrt{4x^2+1}$ ③ -2$\sqrt{4x^2+1}+2x\sqrt{x^4+1}$ ④ -2$\sqrt{4x^2+1}+x\sqrt{x^4+1}$

33. 下列各函數的馬可勞林級數(Maclaurin series)，何者不正確？

① $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ ② $sin\,x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ ③ $tan^{-1}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$ ④ $ln(1+x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$

34. 請計算極限值$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x-e^x}{\log(1+x^2)}$ =？

①-∞ ②-1 ③1 ④∞

35. 下列哪一個不等式不成立？
① $sin^2 x \le 2|x|$ for all $x \in R$　② $e^x \le 7(x\text{-}1)$ for all $x \in R$　③ $\sqrt{1+2x} \le 1+x$ for all $x > 0$　④ $\log x \le -1 + x$ for all $x \ge 2$

36. 設 $T: R^3 \to R^3$，定義 $T(x) = Ax, \forall x \in R^3$，$A$ 為下列何者時，T 不為可逆線性變換(invertible linear transformation)？
① $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　② $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\2&3&0\end{bmatrix}$　③ $A=\begin{bmatrix}1&5&2\\1&2&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$　④ $A=\begin{bmatrix}1&4&-1\\1&2&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$

37. 下列何者不是從 R^3 映到 R^3 的線性變換(linear transformation)？
① $T(x,y,z) = (x, x+y+z)$　② $T(x,y,z) = (3x\text{-}4y, 2x\text{-}5z)$　③ $T(x,y,z) = (1,1)$　④ $T(x,y,z) = (0,0)$

38. 下列何組向量不能生成 R^3？
①(-3,0,4),(5,-1,2),(1,1,3)　②(0,0,3),(2,2,2),(0,1,1)　③(1,4,-1),(2,-3,5),(3,1,4),(5,-2,9)　④(1,0,1),(2,2,0),(3,3,3)

39. 設 $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$是向量空間 V(vector space)中一組基底(basis)，T 為 V 中的任何一個子集(subset)，則下列敘述何者不正確？
①對於任一向量 $v \in V$，存在唯一的一組純量 $c_1,c_2,\ldots,c_n \in F$ 使得 $v= c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n$
②若 T 的元素個數少於 n 個，則 T 必是線性相依的(linearly dependent)
③ S 是線性獨立的
④因為 S 含有 n 個向量，所以 V 中的每一個基底皆含有 n 個向量。

40. 令 x_n 為序列(sequence)，n 是自然數，下列何者的極限最大上界(limit supremum)不存在，也就是說其極限最大上界為無窮大(∞)？
① $x_n = \frac{y_n}{n}$, where $\{y_n\}$ is any bounded sequence　② $x_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{5n+3}$　③ $x_n = (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$　④ $x_n = n\left(1+(-1)^n\right) + n^{-1}\left((-1)^n - 1\right)$

41. 設 A 是一個 $m \times n$ 階矩陣，$Ax= b$ 是一個非齊次系統(non-homogeneous system)，則下列敘述何者有誤？
①若 $m=n$ 且 $Ax= b$ 有唯一解，則解為 $x=bA^{-1}$　②若 $m=n$ 且 $Ax= b$ 有唯一解，則 A 必可逆(invertible)
③若 $Ax= b$ 有解，則 A 與增廣矩陣(augmented matrix)$[A|b]$有相同的秩(rank)
④若 A 與增廣矩陣(augmented matrix)$[A|b]$有相同的秩(rank)，則 $Ax= b$ 有解

42. 下列何者是微分方程式 $\begin{cases} y''+2y'+2y=0 \\ y(\frac{\pi}{4})=2,\ y'(\frac{\pi}{4})=-2 \end{cases}$ 的解？(其中 e 為自然常數)
① $y(t) = -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+t}\cos t + \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}+t}\sin t$　② $y(t) = -\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}+t}\cos t - \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+t}\sin t$　③ $y(t) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-t}\cos t + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-t}\sin t$　④ $y(t) = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}-t}\cos t - \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-t}\sin t$

43. 若 $y(t) = k_1\cos(at) + k_2\sin(bt)$ 為微分方程式 $4y''+9y=0$ 的一般解，其中 k_1 和 k_2 是常數，則$(a+b)$為多少？
① $-\frac{2}{3}$　②1　③ $\frac{9}{4}$　④3

44. 令 $n>1$, $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 為 $x^n = i$ 的 n 個根，求 $z_1+z_2+\cdots+z_n$ 的值 =？
① 1　② 0　③ π　④ 2π

45. 令 $i=\sqrt{-1}$，則 $\left|\frac{1+2i}{-2-i}\right| + \left|\frac{(\pi+i)^{100}}{(\pi-i)^{100}}\right|$ 為多少？
①1　② $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$　③ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2-1}$　④2

46. 令 $i=\sqrt{-1}$，e 為自然常數，則 $(1+i)^6$ 與下列何者相等？
① $6e^{\frac{\pi}{3}i}$　② $8e^{\frac{3\pi}{2}i}$　③ $2e^{-\frac{\pi}{2}i}$　④-1

47. 在複數域中，令 $i=\sqrt{-1}$，z 是複數(complex number)，考慮下列集合：(A) $|z+2-i| \le 1$　(B) $|Arg\,z| < \frac{2\pi}{3}$　(C) $0<|z\text{-}3|<5$　(D) $-2 < \text{Im}\,z \le 2$，在這些集合中，有哪些集合是有界的(bounded)？
①(A)(C)　②(B)(D)　③(A)(B)(C)　④(A)(B)(C)(D)

48. 設 $A=\begin{pmatrix}5&3\\-2&0\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$. 若 $A=PBP^{-1}$，試求 B^6=？
① $B^6=\begin{pmatrix}2^6&1\\1&3^6\end{pmatrix}$　② $B^6=\begin{pmatrix}2^6&1\\0&4^6\end{pmatrix}$　③ $B^6=\begin{pmatrix}5^6&0\\0&3^6\end{pmatrix}$　④ $B^6=\begin{pmatrix}2^6&0\\0&3^6\end{pmatrix}$

49. 令 $i=\sqrt{-1}$，則 $\int_0^2 \frac{t}{(t^2+i)^2}\,dt$ =？
① $\frac{1}{1+i}$　② $\frac{1}{1+2i} - \frac{1}{1-i}$　③ $\frac{1}{2i} - \frac{1}{8+2i}$　④ $\frac{1}{i} - \frac{1}{1+2i}$

50. 河內塔(Tower of Hanoi)遊戲的規則如下：在一塊平放的木板上插上三根垂直於木板的長木釘，在其中一根木釘上，從下至上被套入了 64 片直徑由大至小的圓環形金屬片，規定在每次的移動中，只能搬移一片金屬片，並且在過程中必須保持金屬片由下至上是直徑由大至小的次序，也就是說不論在那一根木釘上，較小片的金屬片都在較大片金屬片的上方。若要將 64 片的金屬片依規則從指定的木釘上全部移動至另一根木釘上，則最少需要搬移多少次？
① 3^{64} 次　② $3^{64}+1$ 次　③ 2^{64} 次　④ $2^{64}-1$ 次

98 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟

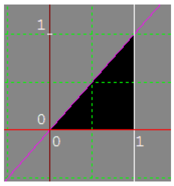
國中數學科正確答案

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

題號	答案	題號	答案	題號	答案	題號	答案	題號	答案
1.	①	2.	④	3.	③	4.	①	5.	④
6.	④	7.	①	8.	③	9.	④	10.	③
11.	①	12.	④	13.	①	14.	②	15.	④
16.	①	17.	③	18.	③	19.	①	20.	②
21.	②	22.	④	23.	①	24.	③	25.	①
26.	③	27.	③	28.	②	29.	①	30.	③
31.	④	32.	③	33.	④	34.	①	35.	②
36.	③	37.	送分	38.	③	39.	②	40.	④
41.	①	42.	③	43.	④	44.	②	45.	④
46.	②	47.	①	48.	④	49.	③	50.	④

98 中區略解

1. [高一] $(1+i)^8=(-2i)^4=16$
2. [線代] $(\lambda-1)(\lambda-4)+2=\lambda^2-5\lambda+6=0,\Rightarrow ab=6$
3. [線代]因為特徵值會使得每行成比例，所以代值進去找比較快，答案是 7。
4. [線代]a=b=c，最多剩一個，e=6d，也剩一個。所以 $\dim(U)=2$
5. [微積分－面積分]積分區域如右圖黑色部分，



$$\iint_R (x+y)dA=\int_0^1\int_0^y (x+y)dxdy=\int_0^1(\frac{x^2}{2}+xy)\Big|_0^y dy=\int_0^1(\frac{3y^2}{2})dy=\frac{y^3}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

6. [微積分－收斂半徑] $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{(1+\frac{1}{n+1})^{(n+1)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{e^{n+1}}=\dfrac{1}{e}$
7. [微積分]原式＝ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{\sin 3x}{3x}\times 4x\times 3x}{x\times 2x\times\frac{\sin 2x}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\times 1\times 12x^2}{2x^2\times 1}=6$
8. [微積分]等價於 $e^{2c}=4,2c=\ln 4=2\ln 2,c=\ln 2$
9. [微積分]gamma 函數，原式＝ $\Gamma(2)=2!=2$
10. [微積分－微分應用] $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{4}{5}$ ，選③
11. [微積分]羅必達，原式＝ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+(1+x)^2}=\dfrac{1}{2}$
12. [微積分]可微就兩條件， $\begin{cases}\text{函數連續}\Rightarrow 2a+b=8-20+12=0\Rightarrow\text{只有}4\\\text{極限存在}\end{cases}$ 符合
13. [線代]定義題，只有①對。(謎之聲，我用背的)
14. [線代] $(I+A)(I-A+A^2-A^3)=I-A^4=I$ ，所以就選②
15. [微積分]套公式， $f'(x)=\ln 10\times 10^x$
16. [微積分]第二定理應用，中南區幾乎每年必考。 $f'(0)=e^0\times 2\times 0=0$
17. [高二]配方後可知是雙曲線。
18. [微積分－黎曼和]同 98 南區 14，原式＝ $\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}$
19. [微積分－偏微分]相當於求 $f_x(-1,2,0)=e^{yz}+yze^{xz}=1+0=1$
20. [高二]正三角形，邊長為 $\sqrt{2}$ ，面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
21. [微積分]兩函數交於兩點 $(-1,\dfrac{1}{4}),(2,1)$ ，直線在上。

所求面積＝$\frac{1}{4}\int_{-1}^{2}[(x+2)-x^2]dx=\frac{9}{8}$

22. [微積分－分部積分]有公式可以背，原式＝$(xe^x-e^x)\Big|_0^1=1$
23. [高三]很送分啊，第二個條件裡面就有了。算都不用算。
24. [高一]基本限制，x－1>0，去對數後，可得到$(x-1)^2>\frac{x+3}{5}$

    $\Rightarrow 5x^2-11x+2>0 \Rightarrow (5x-1)(x-2)>0, x>2, x<\frac{1}{5}$(不合)
25. [微積分]函數是奇函數，所以$g(-2)=-g(2)=-20$
26. [微積分－定積分]交於(－1,0)(1,0)，拋物線在上，面積＝$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$
27. [高一]送分題，原式＝$\frac{1-w^3}{1-w}=0$
28. [國一]用很芭樂的(1,2)(1,3)就找到 1 或 2 了。
29. [線代]$rank(A^T)=rank(A)=2$
30. [線代]特徵值的性質之一，塞進去會變成 O，選③。
31. [微積分]繞非標準座標軸，所以$V=\pi\int_0^1\{[1-(-1)]^2-[\sqrt{y}-(-1)]^2\}dy=\frac{7}{6}\pi$
32. [微積分]還是第二定理，答案是③，通常會忘記要用 chain rule。
33. [微積分]泰勒展開式，④應為 $x^{2(k+1)}$ 才對。
34. [微積分]羅必達，原式＝$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x-e^x}{\frac{1}{\log 10}\times\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{0}\Leftrightarrow -\infty$
35. [高一]②x=0，就爆了。
36. [線代]③因為該選項的行列式值為 0
37. [送分]
38. [線代]③因為前兩個可以生成後兩個，所以最多R^2。
39. [線代]②應該是多於不是少於。
40. [微積分]④交錯級數。
41. [線代]①應為 $x=A^{-1}b$ 才對。
42. [微積分－常微分方程]先算出通解，$y(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t$。再代條件進來。$y(\frac{\pi}{4})=(c_1+c_2)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times e^{-\frac{\pi}{4}}=2, c_1+c_2=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，符合的只有③。
43. [微積分－常微分方程]$r=\frac{\pm\sqrt{-9}}{2}=\pm\frac{3}{2}i \Rightarrow a+b=2\times\frac{3}{2}=3$
44. [高一]由根與係數，可得所求值＝0。

45. [高二]原式＝$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\frac{(\sqrt{\pi^2+1})^{100}}{(\sqrt{\pi^2+1})^{100}}=1+1=2$

46. [高二]要套尤拉公式的形，$(1+i)^6=(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^6=8e^{\frac{3\pi}{2}i}$

47. [高二](A)一個圓與其內部，有界(B)兩射線所夾區域，無界(C)一個環，有界(D)兩平行線所夾區域，無界

48. [線代]因為 A 的特徵值是 2,3，，且 B 是 A 對角化的結果，所以$B^6=\begin{bmatrix}2^6 & 0\\ 0 & 3^6\end{bmatrix}$

49. [微積分－變數變換]令$u=t^2+i,du=2tdt$ ，原式＝$\int_i^{4+i}\frac{\frac{1}{2}du}{u^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u}\Big|_i^{4+i}$

$=\frac{1}{2i}-\frac{1}{8+2i}$

50. [高一]我研究過河內塔，移動次數是有公式的，答案就是④。