

數學試題

1. 定義函數  $f$  在 0 的值, 使  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0$  在  $x = 0$  連續, 則  $f(0)$  為  
(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) -1
2. 令  $f(x) = \sin 3x$  求  $f'(0)$   
(A) 1 (B) 0 (C) 3 (D) 4
3. 求  $\int_0^1 \int_y^1 \cos x^2 dx dy =$   
(A)  $\cos 1$  (B)  $\sin 1$  (C) 0 (D)  $\frac{1}{2} \sin 1$
4. 求函數  $f(t) = \sin^2 2t - 3 \cos^2 t$  在  $0 \leq t \leq 2\pi$  的範圍內的最大值  
(A)  $\frac{1}{16}$  (B) -1 (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$
5. 設雙曲線  $xy = 1$  與直線  $x + y - 3 = 0$  相交於  $C, D$  兩點, 求線段  $\overline{CD}$  之中點座標  
(A)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  (B) (1,1) (C)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  (D)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
6. 設  $x$  為大於 1000 的自然數, 且被 465 除後的餘數為 30, 則  $x$  與 465 的最大公因數為  
(A) 30 (B) 5 (C) 6 (D) 15
7. 求  $\cos \theta$  在  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  之平均值  
(A) 1 (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{2}{\pi}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
8. 設  $m$  為一實數, 若  $\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$  對所有實數  $x$  都成立, 求  $m$  的範圍  
(A)  $-2 < m < 4$  (B)  $1 < m < 3$  (C)  $0 < m < 1$  (D)  $2 < m < 5$

9. 令  $m \mid (35n+26)$  且  $m \mid (7n+3)$ ,  $m > 1$ ,  $n$  為任意自然數, 則  $m =$   
 (A) 2 (B) 7 (C) 11 (D) 3
10. 求函數  $f(x) = 2 - 24x - 3x^2 + x^3$  在區間  $-3 \leq x \leq 1$  的絕對最大值(Absolute maximum)  
 (A) 24 (B) 28 (C) 40 (D) 30
11. 設  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  有一臨界點(critical point)為  $(2, 8)$ , 則  $a =$ ,  $b =$   
 (A)  $a = 2, b = 8$  (B)  $a = 1, b = 2$  (C)  $a = 3, b = 4$  (D)  $a = 2, b = 6$
12. 令  $a, b$  的最大公因數為  $(a, b) = 1$ , 則  $(2a+b, a+2b) =$   
 (A) 1 (B) 1 或 3 (C) 3 (D) 2
13. 令  $a, b$  為二次方程式  $x^2 + 7x - 6 = 0$  的兩根, 求  $a^3 + b^3$   
 (A) 500 (B) -300 (C) 400 (D) -469
14.  $\int_0^3 x^2 \sqrt{9+x^3} dx =$   
 (A) 21 (B) 18 (C) 42 (D) 0
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}} \right) =$   
 (A)  $e-1$  (B)  $e$  (C) 0 (D) 1
16. 求  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的秩(rank)  
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
17. 令  $a, b, c$  為三次方程式  $x^3 + 5x + 11 = 0$  的根, 求  $a^3 + b^3 + c^3$   
 (A) -33 (B) 33 (C) 22 (D) -22
18. 設  $f(x)$  為實係數三次多項式, 且  $f(1+i) = 0$ , 則函數  $y = f(x)$  的圖

形與  $x$  軸有幾個交點？

- (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3

19.  $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+y^2} dy dx =$

- (A)  $\ln 2$  (B)  $\frac{1}{2} \ln 2$  (C)  $\ln 3$  (D) 1

20. 令  $1-2i$  是實係數方程式  $x^2 + ax + b = 0$  的一根，試求  $a, b$  的值

- (A)  $a = -2, b = 5$  (B)  $a = 2, b = -5$  (C)  $a = 1, b = 3$  (D)  $a = 2, b = 4$

21. 令  $a, b$  皆為整數，則 “ $a > 0$  且  $b > 0$ ” 為 “ $a + b > 0$ ” 的

- (A) 必要非充分條件 (B) 充要條件 (C) 充分非必要條件  
(D) 以上皆非

22. 令  $C$  為 1 到 99 的正整數所成的集合。  $A = \{x \mid x \in C \text{ 且 } x \text{ 是 } 3 \text{ 的倍數}\}$ ,

$B = \{x \mid x \in C \text{ 且 } x \text{ 是 } 5 \text{ 的倍數}\}$ . 求  $A \cup B$  的元素的個數

- (A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 50

23. 令  $A(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$  則  $\frac{dA}{dx} =$

- (A)  $\frac{2x}{1+x^2}$  (B)  $\frac{1}{1+x^2}$  (C) 0 (D)  $2x$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x} =$

- (A)  $\infty$  (B) 0 (C) -1 (D) 1

25. 求級數  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$  的收斂半徑

- (A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

26. 直線  $L: 3x + y - 9 = 0$  與圓  $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$  的關係為

- (A) 相切 (B) 相交於兩點 (C) 不相交 (D) 以上皆非

27. 試求  $\lambda$  的值讓下列方程組有非零解
- $$\begin{aligned}\lambda x + 4y + 2z &= 0 \\ 4x + \lambda y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + (\lambda - 3)z &= 0\end{aligned}$$
- (A)  $\lambda = 1$  或  $-2$  (B)  $\lambda = 3$  或  $-4$  (C)  $\lambda = 5$  (D)  $\lambda = 4$  或  $-5$
28. 曲線  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$  在點  $(2, 4)$  的切線斜率為
- (A) 1 (B)  $\frac{4}{5}$  (C)  $-\frac{4}{5}$  (D)  $\frac{1}{3}$
29. 求常微分方程  $y'' - 4y' + 4y = 0$  的通解
- (A)  $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$  (B)  $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$  (C)  $c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$   
(D)  $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
30. 令  $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}, v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  且  $u \neq 0, v \neq 0$ , 則矩陣  $uv^T$  的秩為
- (A)  $n$  (B) 1 (C) 0 (D) 2
31. 試求  $b, c$  使得矩陣  $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i & c \end{pmatrix}$  為 unitary matrix
- (A)  $b = 1, c = -1$  (B)  $b = 1, c = 1$  (C)  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}i, c = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  
 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}i, c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
32. 令  $f(x, y) = y^2 - x^2$ , 試求該函數在點  $(1, 2)$  的最大方向導數
- (A)  $2\sqrt{5}$  (B) 20 (C)  $\sqrt{5}$  (D) 4
33. 令  $a \neq 0$  求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2}$
- (A)  $\frac{1}{2a}$  (B) 0 (C)  $\infty$  (D) 1
34. 令  $f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$ , 求  $f_x(0, 1, 2)$
- (A) 1 (B)  $1 - \ln 2$  (C)  $\ln 2$  (D)  $1 + \ln 2$

35. 令  $\lambda$  為方矩陣  $A$  的特徵值，求  $\det(\lambda I - A)$   
 (A)  $-1$  (B)  $1$  (C)  $0$  (D)  $2$
36. 令  $A \in R^{3 \times 3}$  且  $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ，求  $P(A)$   
 (A) 零矩陣 (B) 單位矩陣  $I$  (C)  $2I$  (D)  $3I$
37. 在一箱子中有 8 個好的蘋果和 2 個壞的蘋果，今隨機取用其中 2 個。請問這取用的 2 個都是好的機率為多少？  
 (A)  $\frac{25}{45}$  (B)  $\frac{26}{45}$  (C)  $\frac{27}{45}$  (D)  $\frac{28}{45}$
38. 令  $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \\ 8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$ ，則矩陣  $A$  的秩(rank)為  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
39. 七年八班教室的號碼鎖的號碼是由 0, 1, 2, 3, 4 等 5 個數字所組成的 4 個數字碼，請問總共有多少種可能的號碼？  
 (A) 600 (B) 525 (C) 625 (D) 500
40. 判別方程式  $4x^2 + xy + 6y^2 = 36$  的圖形  
 (A) 雙曲線 (B) 此圖形為空集合 (C) 橢圓 (D) 以上皆非
41.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$   
 (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{2} - 1$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\frac{\pi}{2} + 1$
42. 令  $F(x) = \int_1^{x^2} \cos t dt$  求  $F'(x)$   
 (A)  $\cos x^2$  (B)  $2x \sin x^2$  (C)  $\sin x^2$  (D)  $2x \cos x^2$
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

(A)  $\infty$  (B) 0 (C) 1 (D)  $\frac{1}{2}$

44,  $\int_0^1 \sin^{-1} x dx =$

(A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{2} - 1$  (C)  $\frac{\pi}{2} + 1$  (D)  $-\frac{\pi}{2}$

45,  $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} dx =$

(A)  $\sqrt{41} - 3$  (B)  $\sqrt{31}$  (C)  $\sqrt{71}$  (D) 8

46,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} =$

(A) 0 (B) 1 (C)  $\frac{1}{5}$  (D) 5

47. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

(A) 1 (B) 0 (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$

48.  $\int_0^1 x e^x dx =$

(A) 1 (B)  $e$  (C)  $e - 1$  (D)  $e + 1$

49. 令  $u \in R^n$  為單位行向量 ( $\|u\|_2 = 1$ ) 且  $I \in R^{n \times n}$  為單位矩陣，求

$\det(I - 2uu^T)$

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2

50. 令  $u \in R^n$  為單位行向量 ( $\|u\|_2 = 1$ )， $n > 1$  求  $\det(uu^T)$

(A) 1      (B)  $-1$       (C)  $e$       (D) 0

金門縣 98 學年度國民中學正式教師暨代理代課教師甄試筆試

# 數學領域答案卷

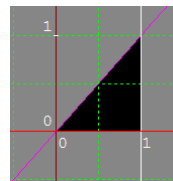
一、選擇題(1~50 題每題 2 分，共 100 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	D	A	D	D	C	B	C	D	A	B	D	C	A	B	A	A	B	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	B	B	D	D	B	D	B	B	B	C	A	A	D	C	A	D	A	C	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50										
B	D	D	B	A	D	C	A	C	D										



98 金門縣略解

1. [微積分]基本觀念題，其值為 1。
2. [微積分]  $f(x) = 3\cos 3x \Rightarrow f'(0) = 3$
3. [微積分—面積分]積分區域如右圖，



$$\int_0^1 \int_y^1 \cos x^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^x \cos x^2 dy dx = \int_0^1 x \cos x^2 dx = \frac{\sin x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\sin 1}{2}$$

4. [高一]令  $x = \cos 2t$ , 原式  $= 1 - x^2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x = -(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{16}$
5. [高二]反正中點必在  $x+y=3$  上面，所以選(D)。
6. [國一](465,30)=15
7. [微積分]所求  $= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$
8. [高一]移項化簡， $2x^2 + (6-2m)x + (3-m) > 0$ ，故判別式小於 0。  
解得  $1 < m < 3$ 。
9. [高一]  $m \mid (35n + 26) - 5(7n + 3) = 11, m = 11$
10. [微積分]令  $f'(x) = -24 - 6x + 3x^2 = 0, x = -2, 4$ ，範圍內只有  $-2$  符合，  
代入後  $f(-3) = 20, f(-2) = 30, f(1) = -24$ ，因此 30。
11. [微積分]臨界點  $\Rightarrow f'(x) = 0 = a - \frac{b}{x^2} = a - \frac{b}{4}$ ，又  $2a + \frac{b}{2} = 8$  故  $\begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}$
12. [國一]用(1,2)(1,3)(1,4)去套，就可以得到 1 或 3 的結果。
13. [國二]  $\begin{cases} a+b=-7 \\ ab=-6 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = -469$
14. [微積分—變數變換]令  $u = 9 + x^3, du = 3x^2 dx \Rightarrow$  原式  $= \int_9^{36} \sqrt{u} \times \frac{du}{3} = 42$
15. [微積分—黎曼和]原式  $= \int_0^1 e^x dx = e - 1$
16. [線代]就算吧， $\text{rank}(A) = 3$ 。

$$17. \text{ [高一] } \begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=5 \\ abc=-11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{所求} = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc = -33$$

18. [高一]實係數多項式，複數根共軛成對，所以剩下一個實數解。
19. [微積分—面積分]積分區域如第一題中的圖，另外那一塊三角形。

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{1+y^2} dx dy = \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln|1+y^2| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

20. [高一]令一根必為  $1+2i$ ，故  $a=-2, b=5$ 。
21. [高一] $a>0, b>0$  可以充分地說  $a+b>0$ ，但非必要。反過來就甚麼都不是。
22. [高一]高斯公式， $[\frac{99}{3}] + [\frac{99}{5}] - [\frac{99}{15}] = 46$
23. [微積分]又是第二定理應用，答案是(B)
24. [微積分] $\sin x, \cos x$  相對於  $x$  已經微不足道，所以值為 1。
25. [微積分]  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{4^n}}{\frac{n+1}{4^{n+1}}} = 4$
26. [高二]圓心到直線的距離為  $\frac{8}{\sqrt{10}} < \text{半徑} 3$ ，所以交兩點。
27. [高二]克拉馬公式， $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = 4, -5$
28. [微積分]前面已經算過很多次了，請自行計算囉。 $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}$
29. [微積分—常微分方程]通解形式最好背一下，答案是(B)
30. [線代]展開後雖然是  $n \times n$ ，參考 38 題，因各行成比例，所以 rank 還是 1。
31. [線代]建議放棄算出  $b, c$ ，定義是  $Q^{-1} = \overline{Q}^T$ ，翻成白話是反矩陣等於共軛轉置矩陣。偷吃步就是  $\det(A) = 1$ 。所以答案是(C)。
32. [微積分—多變數函數]  $\nabla f(1,2) = (-2x, 2y) = (-2, 4), \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$
33. [微積分]原式  $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \times \frac{1}{x+a} = 1 \times \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}$
34. [微積分—多變數函數]  $f_x(0,1,2) = 1 \times e^0 + \ln 2 = 1 + \ln 2$
35. [線代]定義題，答案是 0。
36. [線代]定義題，每個元素都是 0，所以是 0 矩陣。
37. [高二]  $\frac{C_2^8}{C_2^{10}} = \frac{28}{45}$
38. [線代]肉眼可以看出各行成比例，所以  $\text{rank}(A)=1$
39. [國三]  $4 \times 5^3 = 500$
40. [高二]因為不變量  $1 - 4 \times 4 \times 6 < 0$ ，橢圓。
41. [微積分]原式  $= (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$
42. [微積分]又來啦，第二定理， $F'(x) = \cos x^2 \times 2x - \cos 1 \times 0$
43. [微積分]羅必達，原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

44. [微積分－變數變換]令  $x = \sin \theta$ ，就跟第 41 題一樣了。

45. [微積分－變數變換]令  $u = \sqrt{2x^2 + 9}$ ,  $u^2 = 2x^2 + 9$ ,  $2udu = 4xdx$ ,

$$du = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} dx, \text{ 故原式} = \int_9^{41} du = \sqrt{41} - \sqrt{9}$$

46. [微積分]原式  $= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5$

47. [微積分]先約  $\frac{\sin x}{x}$ ，再套羅必達，再約  $\frac{\sin x}{x}$ 。

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec x \tan x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

48. [微積分－分部積分]同 98 中區 22，答案是 1。

49. [線代] $uu^T$  會是左上角=1，其他元素都是 0 的矩陣，所以  $I - 2uu^T$  會成為左上角是 -1，主對角線其他元素都是 1 的矩陣，其行列式值為 -1。

50. [線代]如上題所述， $uu^T$  會是左上角=1，其他元素都是 0 的矩陣，其行列式值會是 0。