

桃園縣 99 年國民中學新進教師甄選【專門科目：數學】試題卷

※注意事項：1. 答案一律畫在答案卡上，如寫在試題卷上不予計分。

2. 作答完畢，請將試題及答案卡一併交回。

3. 本試題共二頁。

一、單一選擇題：請依照題意，從四個選項中選出一個正確或最佳的答案(共25題，每題4分，合計100分)

1. 若 $G(1)=1$ 且對所有 $n \geq 2$ 的整數 $G(n)=G(n-1)+\frac{1}{3}$ ，

則 $G(100)=$

- (A) 33
- (B) 34
- (C) 35
- (D) 36

2. 某位數學家於他早期導出此公式：對所有實數 x 滿足

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x。他是$$

- (A) 歐幾里得
- (B) 歐拉
- (C) 牛頓
- (D) 高斯

3. 將自然數依序寫出如下的算式，例如，

$$\text{第 1 個算式： } 1+2 = 3$$

$$\text{第 2 個算式： } 4+5+6=7+8$$

$$\text{第 3 個算式： } 9+10+11+12 = 13+14+15$$

按照此規律繼續寫下去的第 100 個算式之等號右側的數字總和是多少？

- (A) 1014949
- (B) 1015050
- (C) 1015151
- (D) 1015152

4. 設 $S=1^2+2^2+3^2+\cdots+2008^2+2009^2+2010^2$ ，則 S 的個位數字為

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

5. 假設 A 是 3×3 方陣使得 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 且 $A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，

$$\text{則 } A \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = ?$$

- (A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (B) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$6. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

- (A) $1 - \pi/4$
- (B) $\pi/4$
- (C) $\tan^{-1}\left(\sqrt{2}/2\right)$
- (D) $\ln 2$

7. 設 $f(n) = x^n + \frac{1}{x^n}$ (n 為正整數) 且 $f(1)=1$ ，

求 $f(100)$ 之值為

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

8. 過點 $(1, 8)$ 與曲線 $y = x^3 - x^2 - 8x + 8$ 相切之切線方程式為 $y = ax + b$ ，求 $a + b$ 之值為

- (A) 8
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 16

9. 若 $\cos \theta - \sin \theta = 1$ ，則 $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta$ 之值為

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) 1

10. 隨機自 1 到 100 的正整數中任選一數 a (包括 1 及 100)，設選到 $a \leq 50$ 的機率為 p 而選到 $a > 50$ 的機率為 $2p$ ，求選到的 a 為平方數的機率最接近下列何數

- (A) 0.06
- (B) 0.07
- (C) 0.08
- (D) 0.09

11. 若向量 $|\vec{a}| = |\vec{b}| + 1 = |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，則向量 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為

- (A) $\frac{\pi}{6}$
- (B) $\frac{\pi}{4}$
- (C) $\frac{2\pi}{3}$
- (D) $\frac{3\pi}{4}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ 之值為

- (A) 0
- (B) $\cot \theta$
- (C) $-2 \cot 2\theta$
- (D) $\tan \theta$

13. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，若 $f(1) = f(4) = 0$ ， $f(2) = -16$ ， $f(3) = -20$ ，則 b 之值為

- (A) -6
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 16

14. 令 $a = \log_{10} 2$ 、 $b = \log_2 3$ 、 $c = \log_3 7$ 。請問 $10^{1-a+abc}$ (即：10 的 $(1-a+abc)$ 次方) 是多少？
- Ⓐ 14
Ⓑ 21
Ⓒ 35
Ⓓ 42

15. 設 a 為常數。若線性方程組
$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-y-z=4 \\ 5x-y+az=8 \end{cases}$$
 無解，

則 $a = ?$

- Ⓐ 0
Ⓑ $\frac{3}{5}$
Ⓒ $-\frac{2}{5}$
Ⓓ $\frac{17}{5}$
16. 有一個凸六邊形 $ABCDEF$ ，它的每一個內角都是 120° 。已知 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 5$ 、 $\overline{CD} = 6$ 、及 $\overline{DE} = 4$ 。請問這個六邊形的面積為何？

- Ⓐ $40\sqrt{3}$
Ⓑ $\frac{135\sqrt{3}}{4}$
Ⓒ $\frac{125\sqrt{6}}{4}$
Ⓓ $40\sqrt{6}$
17. 一個三角形的三條中線長分別為 4, 5, 6。請問這個三角形的面積為何？

- Ⓐ $5\sqrt{7}$
Ⓑ $\frac{15\sqrt{3}}{4}$
Ⓒ 15
Ⓓ $\frac{10\sqrt{2}}{3}$
18. 空間中兩球面 $C_1: x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25$ 、
 $C_2: (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$ 所相交形成的圓的面積為何？

- Ⓐ 15π
Ⓑ $\frac{175\pi}{11}$
Ⓒ $\frac{185\pi}{11}$
Ⓓ $\frac{195\pi}{11}$
19. 將五個真分數： $\frac{11}{17}$ 、 $\frac{13}{20}$ 、 $\frac{24}{37}$ 、 $\frac{37}{57}$ 、 $\frac{61}{94}$ 由小到大排成一列，排第三的是哪一個？

- Ⓐ $\frac{13}{20}$
Ⓑ $\frac{24}{37}$
Ⓒ $\frac{37}{57}$
Ⓓ $\frac{61}{94}$

20. 平面上有一線段 $\overline{AB} = 5$ 。已知平面上滿足 $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{BP}$ 的動點 P 所形成的軌跡為一個圓。請問此圓的半徑為何？

- Ⓐ 5
Ⓑ $\frac{5}{4}$
Ⓒ $\frac{5}{2}$
Ⓓ $\frac{15}{8}$

21. 小明在布置教室時，需要將五條不同顏色的綵帶掛在教室後方五片不同形狀的木板上。請問每片木板上最多掛兩條綵帶的方法有幾種？

- Ⓐ 720
Ⓑ 1440
Ⓒ 2220
Ⓓ 3600

22. 設 k 為實數。若 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = 1$ ，請問 k 值為何？

- Ⓐ π
Ⓑ 2π
Ⓒ $\frac{1}{\pi}$
Ⓓ $\frac{1}{2\pi}$

23. 坐標空間中有兩歪斜線 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 、

$M: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ 。請問這兩條歪斜線的距離為何？

- Ⓐ $\frac{\sqrt{38}}{19}$
Ⓑ $\frac{\sqrt{46}}{23}$
Ⓒ $\frac{\sqrt{58}}{29}$
Ⓓ $\frac{\sqrt{62}}{31}$

24. 設 $\{a_n\}$ 為一數列， $\sum_{i=1}^n a_i = 2n^2 + 2n + 3$ ，

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} - \sqrt{a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1}})$ 之值為

- Ⓐ $-\sqrt{2}$
Ⓑ $-2\sqrt{2}$
Ⓒ -2
Ⓓ -4

25. 設 $f(x) = x^3 + 2$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$ 之值為

- Ⓐ 0
Ⓑ 1
Ⓒ 3
Ⓓ 12

桃園縣 99 年國民中學新進教師甄選

【 專 門 科 目 ： 數 學 】 試題答案

一、選擇題：（共 25 題, 每題 4 分）

1	Ⓑ	2	Ⓑ	3	Ⓑ	4	Ⓒ	5	Ⓓ
6	Ⓐ	7	Ⓑ	8	Ⓐ	9	Ⓓ	10	Ⓓ
11	Ⓒ	12	Ⓒ	13	Ⓐ	14	Ⓒ	15	Ⓒ
16	Ⓑ	17	Ⓐ	18	Ⓑ	19	Ⓓ	20	Ⓓ
21	Ⓒ	22	Ⓐ	23	Ⓓ	24	Ⓒ	25	Ⓓ

99 桃園縣略解

1. [國二]化妝後的等差數列，首項為 1，公差 $\frac{1}{3}$ ，第 100 項 = 34。

2. [常識]看來教甄很愛尤拉公式。

3. [高一]化妝後的平方和， $S_n = 3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, $S_{100} = 1015050$

4. [高一]卸妝後的平方和， $S_{2010} = \frac{2010(2011)(4021)}{6} \Rightarrow$ 個位數為 5

5. [線代] $A \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. [微積分－三角代換] 令 $x = \tan \theta$, $dx = \sec^2 \theta d\theta$ ，原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) d\theta = (\tan \theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

7. [高二] $f(1) = x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^6 = 1$

$$\Rightarrow f(100) = x^{100} + \frac{1}{x^{100}} = x^4 + \frac{1}{x^4} = -(x + \frac{1}{x}) = -1$$

8. [微積分]露出馬腳的微積分，將(1,8)代入直線方程式， $8=a+b$

9. [高一] $\cos \theta - \sin \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = -1 \end{cases} \Rightarrow$ 所求都是 1

10. [高二] $p + 2p = 1$, $p = \frac{1}{3}$ ，1~50 的平方數有 7 個，50~100 的平方數有 3 個。

$$\frac{1}{3} \times \frac{7}{50} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{50} = \frac{13}{150} \doteq 0.09$$

11. [高一] $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ ， $4 = 4 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \times |\vec{b}|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$$

12. [微積分]這題討論了很多次，我覺得問題出在沒有對角度作規範，不然 0 度的話，答案就是(A)了。角度小於 45 度的話，一堆正值怎麼也加不出負值的。

13. [高一] 令 $f(x) = (ax - e)(x - 1)(x - 4) \Rightarrow \begin{cases} f(2) = -16 = (2a - e) \cdot 1 \cdot (-2) \\ f(3) = -20 = (3a - e) \cdot 2 \cdot (-1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ e = -4 \end{cases} \Rightarrow b = -6$$

14. [高一]先算 $1-a+abc = \log 35 \Rightarrow 10^{\log 35} = 35$

15. [高二]無解表 $\Delta = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$

16. [國二]固定補成一個大正三角形，面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4}(15^2 - 7^2 - 5^2 - 4^2) = \frac{135}{4}\sqrt{3}$ 。

17. [高二]有公式，面積 $= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{15 \times 7 \times 5 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2}} = 5\sqrt{7}$

18. [高二]兩球心距離為 $\sqrt{11}$ ，設其中大球球心到圓心的距離為 x ，則小球球心到圓

心的距離為 $\sqrt{11} - x$ ， $r^2 = 5^2 - x^2 = 4^2 - (\sqrt{11} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow \pi r^2 = \frac{175}{11}\pi$

19. [國一]不難得到 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ， $\frac{11}{17} < \frac{13}{20} \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{24}{37} < \frac{13}{20} \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{24}{37} < \frac{37}{57} < \frac{13}{20}$

$\frac{11}{17} < \frac{24}{37} < \frac{61}{94} < \frac{37}{57} < \frac{13}{20}$

20. [高二]這我剛好也做過科展，叫做阿波羅尼奧斯圓。半徑公式 $= 5 \times \frac{3}{3^2 - 1} = \frac{15}{8}$

21. [高二]
$$\begin{cases} (1,1,1,1) \Rightarrow 5! = 120 \\ (2,1,1,0) \Rightarrow C_2^5 \cdot 3! \cdot \frac{5!}{3!} = 1200 \\ (2,2,1,0,0) \Rightarrow C_2^5 \cdot C_2^3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 900 \end{cases}$$
 共 2220 種

22. [微積分]又是高斯積分，今年也有考。 $\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-cx^2} = a \sqrt{\frac{\pi}{c}}$ ，以本題而言， $k = \pi$ 。

23. [高二]純粹考計算的，方法固定，找出兩線的公垂線的方向向量，可用外積，

得到 $(-3, 2, -7)$ ，算到這邊我看到長度是 $\sqrt{62}$ ，就選(D)了。不然還要設 P, Q 兩點

曠日廢時。

24. [微積分]也是化妝過的數列，除了 $a_1 = 7, a_n = 4n (n \geq 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{(8+8n)n}{2}} - \sqrt{\frac{(12+8n+4)n}{2}} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2n})$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 2n}} = -1$$
，也沒在答案裡面。

25. [微積分]化妝後的 $f'(2) = 12$ 。今年考題似乎也有幾題這樣的。像瑕積分。