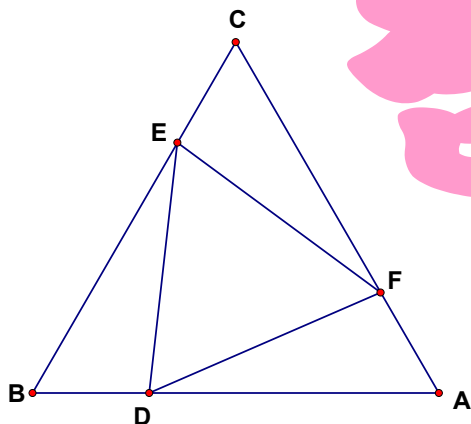


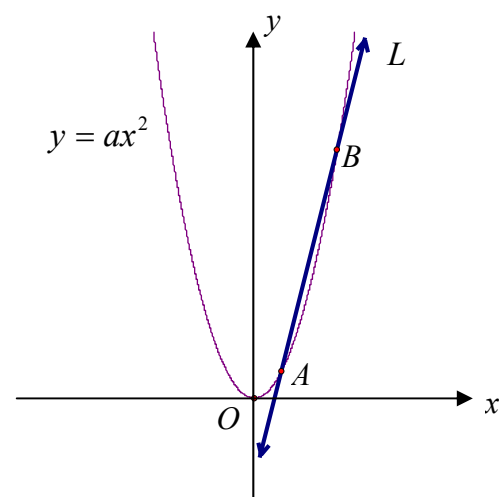
貳、數學專業科目

選擇題（共 30 題，每題 2 分，共 60 分）

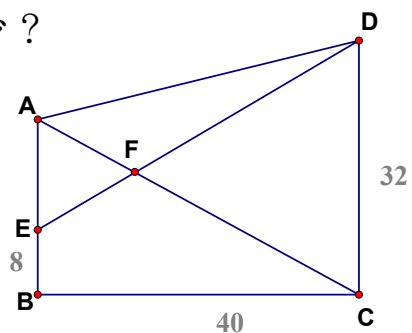
41. 已知  $p$  是一個質數，則  $p^2$  除以 6 的餘數不可能為何？  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
42. 已知一等差數列共有 10 項，且其奇數項的和為 150，偶數項的和為 300，則此數列的公差為何？  
 (A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30
43. 若  $456456 = 2^3 \times a \times 7 \times 11 \times 13 \times b$ ，其中  $a, b$  均為質數，則  $(456456, 817) = ?$   
 (A) 7 (B) 13 (C) 19 (D) 43
44. 下列哪一個方程式有整數解？  
 (A)  $2x - 123y = 6$  (B)  $2x + 6y = 123$   
 (C)  $6x + 123y = 2$  (D)  $123x + 6y = 4$
45. 在坐標平面上，設  $P$  為  $y = 1 + x - x^2$  圖形上的一點，若  $P$  點的  $x$  坐標為  $\log_2 5$ ，則  $P$  點的位置在哪一象限？  
 (A) 第一象限 (B) 第二象限  
 (C) 第三象限 (D) 第四象限
46. 已知  $a = 1.003 \times 1.003 \times 1.003$ ， $b = 1.003 \times 1.004 \times 1.002$ ，求  $a - b = ?$   
 (A) 0 (B) 1.003  
 (C)  $1.003 \times 10^{-3}$  (D)  $1.003 \times 10^{-6}$
47. 設實數  $a_1, a_2, a_3$  為一等差數列，而實數  $b_1, b_2, b_3$  為一等比數列，下列哪一個敘述是正確的？  
 (A)  $2a_1 + 5$ ， $2a_2 + 5$ ， $2a_3 + 5$  為等差數列  
 (B)  $2b_1 + 5$ ， $2b_2 + 5$ ， $2b_3 + 5$  為等比數列  
 (C)  $2a_1 + 5$ ， $4a_2 + 5$ ， $8a_3 + 5$  為等差數列  
 (D)  $2b_1 + 5$ ， $4b_2 + 10$ ， $8b_3 + 20$  為等比數列
48. 若  $\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{a}{2^{(2i-1)}} + \frac{b}{2^{(2i)}} \right) = 4$ ，則  $(2a + b) = ?$   
 (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16
49. 坐標平面上有一函數  $y = 2(x - 175)(x - 176) + 6$  的圖形，其頂點坐標落在哪一個象限內？  
 (A) 第一象限 (B) 第二象限  
 (C) 第三象限 (D) 第四象限
50. 如圖，正三角形  $DEF$  的三個頂點分別在正三角形  $ABC$  的邊上。若  $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{AF} = 2$ ，則正三角形  $DEF$  的面積：正三角形  $ABC$  的面積 = ?  
 (A) 18 : 49  
 (B) 19 : 49  
 (C) 20 : 49  
 (D) 21 : 49



51. 下列 4 個數中，何者為最小？  
 (A)  $2^{\frac{1}{2}}$  (B)  $(\frac{1}{4})^{-3}$  (C)  $2^{\frac{1}{2}}$  (D)  $4^{\frac{1}{2}}$
52. 對於任何正整數  $n$ ，下列哪一個分數必為最簡分數？  
 (A)  $\frac{21n+3}{14n+4}$  (B)  $\frac{21n+4}{14n+3}$   
 (C)  $\frac{21n+6}{14n+5}$  (D)  $\frac{21n-3}{14n+4}$
53. 解  $x, y$  的二元一次聯立方程式  $\begin{cases} ax + (a+m)y = (a+2m) \\ bx + (b+n)y = (b+2n) \end{cases}$ ，其中  $a, b, m, n$  均不為 0，且  $\frac{a}{b} \neq \frac{m}{n}$ 。請求出  $y = ?$   
 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2
54. 請求出  $(1 - \frac{1}{4}) \times (1 - \frac{1}{9}) \times (1 - \frac{1}{16}) \times (1 - \frac{1}{25}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{9801}) = ?$   
 (A)  $\frac{2450}{3267}$  (B)  $\frac{50}{33}$  (C)  $\frac{49}{99}$  (D)  $\frac{50}{99}$
55. 計算  $\sqrt{2010 \times 2011 \times 2012 \times 2013 + 1} = ?$   
 (A)  $2011 \times 2012 + 9$  (B)  $2010 \times 2013 + 1$   
 (C)  $2013^2 - 8$  (D)  $2010^2 + 1$
56. 已知  $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，則  $b^7$  與下列哪一個選項相等？  
 (A)  $-3b + 2$  (B)  $5b - 3$   
 (C)  $-8b + 5$  (D)  $13b - 8$
57. 如圖，在直角坐標平面上，拋物線  $y = ax^2$  與直線  $L$  (其方程式為  $y = 4x + k$ ) 相交於  $A, B$  兩點。若  $A, B$  兩點的  $x$  坐標分別為 2 與 6，則  $a = ?$   
 (A) 1 (B) 2  
 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{4}$

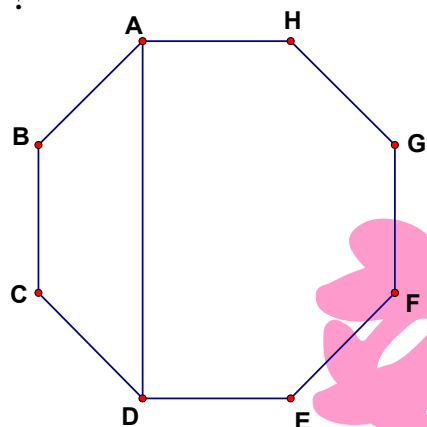


58. 如圖，四邊形  $ABCD$  中， $\angle B = \angle BCD = 90^\circ$ 。若  $\overline{BC} = 40$ ， $\overline{BE} = 8$ ， $\overline{CD} = 32$ ，則四邊形  $BCFE$  的面積與三角形  $AFD$  的面積相差多少？  
 (A) 128  
 (B) 160  
 (C) 256  
 (D) 320



59. 如圖，若正八邊形  $ABCDEFGH$  的面積為  $a$ ，四邊形  $ABCD$  的面積為  $b$ ，則  $\frac{b}{a} = ?$

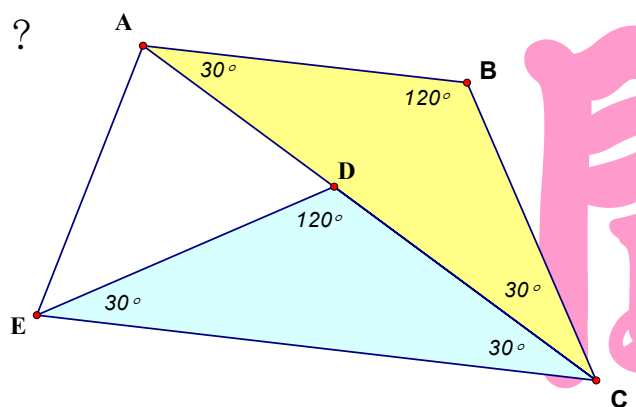
- (A)  $\frac{1}{3}$   
(B)  $\frac{1}{4}$   
(C)  $\frac{2}{5}$   
(D)  $\frac{3}{8}$



60. 如圖， $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ ， $A$ 、 $B$ 、 $C$  的對應點分別是  $E$ 、 $D$ 、 $C$ ，而它們的內角度數與各點的位置如圖中所示。

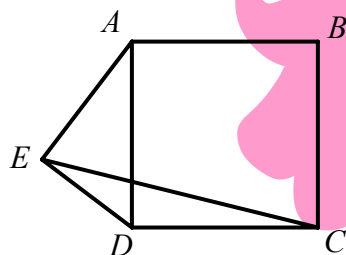
請問  $\angle DAE = ?$

- (A)  $45^\circ$   
(B)  $60^\circ$   
(C)  $75^\circ$   
(D)  $90^\circ$



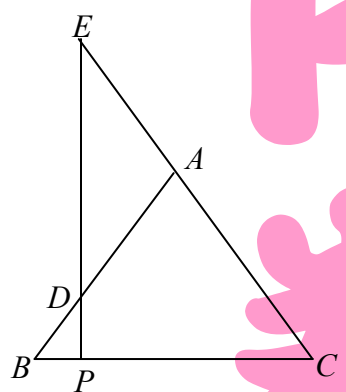
61. 如圖，四邊形  $ABCD$  為正方形，在  $\triangle AED$  中， $\angle AED = 90^\circ$ ， $\overline{AE} = 4$ ， $\overline{DE} = 3$ ，求  $\triangle CED$  的面積為何？

- (A) 3  
(B)  $\frac{9}{2}$   
(C) 6  
(D)  $\frac{15}{2}$



62. 如圖，已知  $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{BP} = 1$ ， $\overline{EP} \perp \overline{BC}$  於  $P$  點，各點的位置如圖所示。請判斷下列敘述，何者錯誤？

- (A)  $\overline{PD} = \frac{4}{3}$   
(B)  $\overline{PE} = \frac{16}{3}$   
(C)  $\overline{AD} = \frac{10}{3}$   
(D)  $\overline{AE} = \frac{10}{3}$



63. 已知數列  $\{a_n\}$  是等比數列，其中首項、公比均不為 0。

如果  $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 18 \\ a_2 + a_3 + a_4 = -9 \end{cases}$ ，那麼  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ?$

- (A) 8  
(B) 16  
(C) 24  
(D) 48

64. 在坐標平面上，四點  $A(5,6)$ ， $B(7,-4)$ ， $C(5,-12)$ ， $D(3,-2)$  為四邊形  $ABCD$  的頂點，下列哪條直線將四邊形  $ABCD$  分成面積相等的兩塊？

- (A)  $3x + 5y = 0$   
(B)  $5x + 3y = 0$   
(C)  $3x - 5y = 0$   
(D)  $5x - 3y = 0$

65. 已知骰子有六面，各面出現的機會相等，且各面的點數分別為 1，2，3，4，5，6。現有甲、乙、丙三個人分別投擲一次上述之公正的骰子，擲出的點數分別是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 。求  $a \geq b + c$  的機率為何？

- (A)  $\frac{15}{216}$   
(B)  $\frac{30}{216}$   
(C)  $\frac{35}{216}$   
(D)  $\frac{50}{216}$

66. 已知  $1 \leq x \leq 1000$  ( $x$  為正整數)，且  $x = a^2 - b^2$  ( $a$ 、 $b$  均為非負整數)，請問滿足上述條件的  $x$  共有多少個？

- (A) 250  
(B) 500  
(C) 750  
(D) 1000

67. 設  $a$  為整數，且方程式  $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + ax + 20 = 0$  的四個根均為實數，其中有兩個根的乘積等於  $-5$ 。請問  $a$  可能為何？

- (A)  $-19$   
(B)  $-11$   
(C) 11  
(D) 19

68. 在坐標平面上，聯立不等式  $\begin{cases} |x| + |y| \leq 2 \\ |x| + |y - 1| \leq 2 \end{cases}$  的解  $(x, y)$

所形成之區域的面積為何？

- (A)  $\frac{9}{4}$   
(B)  $\frac{23}{4}$   
(C)  $\frac{7}{2}$   
(D)  $\frac{9}{2}$

69. 在  $\triangle ABC$  中，設  $\overline{AB} = c$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{AC} = b$ 。今在  $\overline{BC}$  上取一點  $D$ ，使得  $\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ ，則  $\overline{AD}^2 = ?$

- (A)  $\frac{1}{9}(b^2 + 2bc + 4c^2)$   
(B)  $\frac{1}{9}(b^2 - 2bc + 4c^2)$   
(C)  $\frac{1}{9}(4b^2 + 2bc + c^2)$   
(D)  $\frac{1}{9}(4b^2 - 2bc + c^2)$

70. 有一三角形，其三邊上的「高」分別為 6、4、3，則此三角形的面積在下列哪兩個整數之間？

- (A) 2、3  
(B) 5、6  
(C) 9、10  
(D) 12、13

教育專業

數學科學科專業

[illegible]

99 台北市略解

1. [國一]用 2,3,5 去找就夠了，答案是(B)
2. [國二] $5d = 300 - 150 = 150, d = 30$
3. [國一] $817 = 19 \times 43, 456456 = 456 \times 1001 = 2^3 \times 3 \times 19 \times 7 \times 11 \times 13$ ，答案是 19。
4. [高一]觀念題， $ax+by=c$  有整數解的前提是  $a, b$  互質。答案是(A)
5. [高一]丟進去算一下就知道是(+, -)，第四象限。
6. [國二]套一下乘法公式  $a-b = 1.003 \times 0.000001 = 1.003 \times 10^{-6}$
7. [高一]只有(A)是絕對正確。其他未必。
8. [高一]原式  $= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a+b}{2^{2i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a+b}{4^i} = \frac{\frac{2a+b}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 4, 2a+b = 12$
9. [國三] $y = 2(x - \frac{351}{2})^2 + \frac{13}{2} \Rightarrow$  頂點在第一象限
10. [高一] $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE = \frac{2 \times 5}{7 \times 7} \triangle ABC \Rightarrow \triangle DEF = \frac{19}{49} \triangle ABC$
11. [高一] $(A)2^{\frac{1}{2}}, (B)(\frac{1}{4})^{-3} = 2^6, (C)2^{\frac{1}{2}}(D)4^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} \Rightarrow (B) > (A) > (C) > (D)$
12. [高一](A)(B)(D)的分子都有 3 的因數，所以只要讓分母成為 3 的倍數，就不是最簡分數，答案就是(C)了。
13. [國一]易得  $x+y=1$  與  $y=2$
14. [國二]分項對消，最後剩下  $\frac{1}{2} \times \frac{100}{99} = \frac{50}{99}$
15. [國二]令  $2010 = a$ , 原式  $= \sqrt{(a^2 + 3a + 1)^2} = a(a+3) + 1$
16. [高一] $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow b^2 + b - 1 = 0, b^2 = 1 - b \Rightarrow b^4 = 1 - 2b + b^2 = 2 - 3b$   
 $b^6 = (1-b)(2-3b) = 2 - 5b + 3b^2 = 5 - 8b, b^7 = 5b - 8b^2 = 13b - 8$
17. [國三]令  $A(2, 4a), B(6, 36a) \Rightarrow 4 = \frac{36a - 4a}{6 - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
18. [國三]連  $\overline{CE}$ ，則易證  $\triangle ADF = \triangle ECF$ ，所求  $= \triangle BCE = 160$
19. [國三]連  $\overline{AE}$ ，則五邊形  $ABCDE = \frac{a}{2}$ ，又做出正八邊形的外接圓圓心  $O$ ，連  $\overline{OA}$ 、  
 $\overline{OD}$ 、 $\overline{OE}$ ，易得  $\triangle ODE = \frac{1}{8}a$ ， $\triangle ADE = \frac{1}{4}a \Rightarrow ABCD = \frac{1}{4}a$
20. [國二] $\triangle CAE$  為等腰三角形，頂角 30 度，底角 75 度。
21. [高一]定坐標，令  $D(0,0)$ ，則  $E(3\cos \angle CDE, 3\sin \angle CDE)$ ，

$$\text{又 } \sin \angle CDE = \sin(90^\circ + \angle ADE) = \sin(90^\circ - \angle ADE) = \cos \angle ADE = \frac{3}{5}$$

$$\Delta CDE = \frac{1}{2} \times 5 \times (3 \times \frac{3}{5}) = \frac{9}{2}$$

22. [國三]從 A 做  $\overline{BC}$  垂直線交  $\overline{BC}$  於 F，用相似形就可以知道  $\overline{PE} = 4 \times \frac{5}{3}$

23. [高一]易得公比  $r = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 24 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{24}{1 - (-\frac{1}{2})} = 16$

24. [國三]等於問哪條直線通過平行四邊形的重心  $(5, -3)$ ，答案是(A)

25. [國三]如下表，總和為  $\frac{35}{216}$

b+c	2	3	4	5	6
a 的機率	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
b+c 的機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$
合成機率	$\frac{5}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{9}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{5}{216}$

26. [高二]  $\begin{cases} b = a + 1 \Rightarrow \text{所有奇數} \Rightarrow 500 \text{個} \\ a, b \text{同奇或同偶} \Rightarrow 4 \text{的倍數} \Rightarrow 250 \text{個} \end{cases}$

27. [高一]顯然為整係數多項式，則每個根都是整數。另兩根 p, q 乘積為  $-4$ 。且要滿足四根和  $= -4$ ，由下表可知只可能為  $(-5, 1, 2, -2)$ ， $a = -19$

	(1,-4)	(2,-2)	(4,-1)
(-5,1)	-7	-4	-1
(5,-1)	1	4	7

28. [高三]  $|x| + |y| \leq 2$  的圖形是四個頂點恰在  $(\pm 2, 0)(0, \pm 2)$  的正方形，對角線長  $= 4$

$|x| + |y - 1| \leq 2$  的圖形則是將上面的圖形再往上平移一單位，對角線長  $= 4$

這兩個圖形的交集是對角線長  $= 3$  的正方形。面積  $= \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$

29. [高一]  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overline{AD}^2 = \frac{4}{9}\overline{AB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overline{AC}^2$ ，又  $\angle A = 60^\circ$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AC} \text{，所求} = \frac{4c^2 + 2bc + c^2}{9}$$

30. [國三]可令各邊為  $2k, 3k, 4k$ ，

$$\Delta = 6k = \sqrt{\frac{135k^4}{2^4}} = \frac{3}{4}\sqrt{15}k^2, k = \frac{8}{\sqrt{15}}, 6k = \frac{48}{\sqrt{15}} > \frac{48}{\sqrt{16}} = 12$$