99 台北縣略解

1. [國二]如 99 台北市最後一題，三邊可為 $2k,3k,4k$。則兩邊平方和小於第三邊平方，故為鈍角三角形。
2. [高一](C)可能是 SSA，就有兩個了。
3. [國三]由圖知 $\begin{cases} a<0 \\ c>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ b<0 \\ c>0 \end{cases}$ 選(B)
4. [國三] $\overline{AB}=15,$ 令 $\overline{AP}=x,\overline{BP}=25-x,$ 套一下海龍公式。

   $\Rightarrow \Delta=\sqrt{20\times5\times(20-x)\times(x-5)}=10\sqrt{-(x-\frac{25}{2})^2+\frac{225}{4}}\le 10\times\sqrt{\frac{225}{4}}=75$
5. [高一]根與係數，$\begin{cases} \alpha\beta\gamma=-c \\ (\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta=b \\ \alpha+\beta+\gamma=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=c \\ \gamma=\dfrac{b+1}{2} \\ \gamma=-a-2 \end{cases}$
6. [高一](A)(B)(C)都是平移。但(D)開口變大。
7. [高一]鴿籠原理，$[\frac{10000}{5+1}]+1=1667$
8. [高一]展開分項對消剩下 $\log 2011=\log 1000+\log 2.011>3$
9. [高一]可令 $n=2^a\cdot 3^b \Rightarrow \begin{cases} a\times\dfrac{(a+1)(b+1)}{2}=30 \\ b\times\dfrac{(a+1)(b+1)}{2}=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow n=648$
10. [高二] $a+5+b=58-6-38, a+b=9$
11. [國一]但用高二的二項式定理來做會比較快。

    只需要計算 $C_{10}^{99}\times 320\times(-1)^{98}+C_0^{99}\times(-1)^{99}\equiv 79(\text{mod}100)$
12. [國二]很有意思的化妝法，原本都問費氏數列中後項除以前項的比值是黃金比例，這一題特地顛倒過來，所以就黃金比例的倒數。也就是(A)。
13. [高一]同 96 苗栗 43 題，一模一樣。
14. [高一]同 96 苗栗 41 題，一模一樣。
15. [高二]同 96 苗栗 47 題，改改數字，方法相同，a+b+c=2+5+8=15。
16. [高一]配方，原式＝$(x-2y)^2+(y-1)^2+3\ge 3$
17. [高一]應該有重複出現過，但我找不到，當成兩向量來看待，由分母的樣式決定一

個是(x,2y,z)，另一個是(1,－1,2)，則$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$要有最大值，表兩向量夾角為 0，也就是同向。故$\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=2 \end{cases}\Rightarrow$所求值＝$\sqrt{6}$

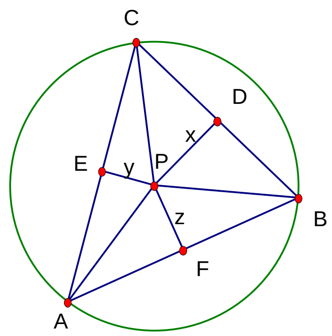
18. [高一]由$2f(x)-f(\dfrac{1}{x})+\dfrac{1}{x}=0$可得$\begin{cases} 2f(\dfrac{1}{x})-f(x)+x=0 \\ 4f(x)-2f(\dfrac{1}{x})+2\dfrac{1}{x}=0 \end{cases}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{3}(x+\dfrac{2}{x})$

 再代算幾不等式，$|f(x)|=\dfrac{1}{3}(x+\dfrac{2}{x})\geq\dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2}$
19. [高一]令$x=3\cos\theta$，原式＝$3\sin\theta+4\cos\theta+2=5\sin(\theta+\phi)+2\leq 7$
20. [高一]因為$\log x=\sin x\leq 1\Rightarrow$只要考慮$x\leq 10$的狀況。首先 $x$≦1 時，log$x$≦0，故不會與 sin$x$ 有交點，但 sin$x$ 從 1 往下掉的過程，必然會與遞增的 log$x$ 有一個交點。而 $x$從$2\pi\to 3\pi$ 過程中，是一個最大值為 1 的曲線，必然與遞增的 log$x$ 有兩個交點。所以總共 3 個。
21. [高一]不管怎樣，圖形會是以 0 為中心，往兩側遞增上去，只是左側會過$(-\dfrac{1}{2},0)$，右側會過(1,0)，所以要選(D)。
22. [高二]克拉馬公式的操作，$\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ r & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}=4,\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}=5,x=\dfrac{\begin{vmatrix} 3c & -3a \\ 3r & -3p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & -3a \\ q & -3p \end{vmatrix}}=\dfrac{9\begin{vmatrix} c & -a \\ r & -p \end{vmatrix}}{3\begin{vmatrix} b & -a \\ q & -p \end{vmatrix}}=15$
23. [國一]台北縣才會考的題目，(1,2)(4,5,6)(3,7,8,9,10)共三組循環，個數為 2,3,5。所以大家同時都回到原地需要$2\times 3\times 5=30$。
24. [高二]排容，$1-(1-0.1)(1-0.2)(1-0.3)=0.496$
25. [高二]先排女的，容許(A,C)(A,E)(A,F)(B,D)(B,F)(C,D)(C,E)(D,F)這八種，加上兩女對調，男生隨便排。共$8\times 2\times 4!=384$
26. [高二]按題意，$\dfrac{C_2^3+C_2^4+C_2^5}{C_2^{12}}=\dfrac{38}{132}\approx 0.29$
27. [高二]$\begin{cases} a=50\times 1.5+7=82 \\ b=10\times 1.5=15 \end{cases}$
28. [高二]如果這些資料完全相同，那標準差是 0，就不會變得更小了。但通常這種狀況微乎其微，加入一個新資料，理論上標準差會變小。所以答案原為(C)，但(D)更好。
29. [機統]$65+4\times 0.675=67.7$

30. [高一]從餘弦公式看，三邊是整數時，必然是有理數。

31. [高一]好像是當年的大學入學考題。不失一般性，可說$\begin{cases} h_a = b\sin C \\ h_b = c\sin A \\ h_c = a\sin B \end{cases}$

所求＝$\dfrac{abc}{abc\sin A\sin B\sin C} = \csc A\csc B\csc C$




32. [高一]芭樂招就是人家說銳角，你就用直角，馬上得到(B)。

有學問的做法是$\angle ACB = \dfrac{1}{2}\angle APB = \angle APF$，

$z = R\cos\angle APF = R\cos\angle C$，所以就(B)了。

33. [高一]原式＝$(1+\sin x)(1+\cos x)+98 \ge 98$

34. [國一]送分得很明顯。$\begin{cases} 3a+b=9 \\ 3c+d=9 \end{cases} \Rightarrow 3x+y=9$

35. [高二]A 在橢圓長軸上，故$-4-(-6) \le \overline{AP} \le 4-(-6)$，不可能是$\sqrt{101}$

36. [國三]很剛好的$1^2+(2\sqrt{3})^2 = 2^2+3^2 \Rightarrow$兩個直角三角形拼起來的四邊形。

面積＝$\dfrac{1}{2}(1\times 2\sqrt{3}+2\times 3) = 3+\sqrt{3}$

37. [高一] $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{PB} \Rightarrow 5\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{AP}$，換句話說，$P$ 在 $\overline{AC}$

上，$\Delta ABP = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}}\Delta ABC = 15$

38. [微積分]分子分母都有 $x-1$，原式＝$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-b)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1-b}{2} = 5 \Rightarrow b=-9, a=8$

39. [微積分]去絕對值，原式＝$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x^2+x+2+x^2-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2+1}{x-1} = -2$

40. [微積分] $f(1)+(f(1))^2 = 1+3+2 = 6 \Rightarrow f(1) = 2, -3$(不合)

又 $f'(x)+2f(x)f'(x) = 4x^3+9x^2 \Rightarrow f'(1)+4f'(1) = 13, f'(1) = \dfrac{13}{5}$