

數學領域試題

注意事項：

1. 本試卷共有測驗題 50 題。
2. 每題均為單選題。

1. 試求 $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3})$ 之值，其中 α 為任意實數。

- (A) $3/2$ (B) 0 (C) 1 (D) $1/2$

2. 試求 $\sqrt{3} \tan 30^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ + \cos 60^\circ$ 之值。

- (A) 0 (B) 3 (C) $1/2$ (D) 1

3. 求 $(1+x+x^2)^5$ 展開式中 x^6 的係數。

- (A) 30 (B) 40 (C) 45 (D) 120

4. 試求 $\frac{1+i}{1-i}$ 之值。

- (A) $-i$ (B) i (C) $-2i$ (D) $2i$

5. 試求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 之值。

- (A) -39 (B) 49 (C) -65 (D) 12

6. 設 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-9} - \frac{x-2}{x(x-3)}$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 之值。

- (A) -1 (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{9}$

7. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+4+5+\cdots+n}{n^3}$ 之值。

- (A) 1 (B) ∞ (C) $-\infty$ (D) 0

8. 甲乙兩人共解一題計算證明題。已知甲能解出之機率為 $\frac{3}{4}$ ，乙能解出之機率為 $\frac{2}{3}$ ，

求此題被解出之機率。

- (A) $\frac{11}{12}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{5}{8}$

9. 求過點(8,-4)至圓 $x^2 + y^2 + 6x + 6 = 0$ 之切線長。

- (A) $\sqrt{26}$ (B) $\sqrt{134}$ (C) $\sqrt{58}$ (D) $\sqrt{129}$

10. 試問方程式 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 3$ 之實根的個數。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 無窮多個

11. 試求 $-3x^2 + 4x - 1$ 之極大值。

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{3}$

12. 試問 $2^8 \times 8^{10} \times 5^{12}$ 為幾位數？

- (A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21

13. 試問 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$ 其小數點與第一個非零數字之間有幾個零？

- (A) 300 (B) 301 (C) 302 (D) 303

14. 試解不等式 $\frac{3x}{2} - \frac{2x-1}{3} > 3x-4$ 。

- (A) $x > 2$ (B) $x < 2$ (C) $x > 1$ (D) $x < 1$

15. 試問聯立方程式
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$
共有幾組解？

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

16. 試求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\cos x}$ 之值。

- (A) π (B) $-\pi$ (C) ∞ (D) 0

17. 試問在下列哪些點，函數 $f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-2}$ 是不連續的。

- (A) 4 (B) -1,2,4 (C) -1,2 (D) -1,2,4,2

18. 決定一個 c 值使得函數 $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 5 \\ cx-3, & x > 5 \end{cases}$ 在整個實數線上是連續的。

- (A) 0 (B) $\frac{6}{5}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{6}$

19. 下列哪些敘述對函數 $f(x) = \sqrt{x^2-25}$ 來說是錯的。

- (A) f 在 $x=10$ 是連續的 (B) f 在區間 $(-\infty, -5]$ 是連續的
(C) f 在區間 $[5, \infty)$ 是連續的 (D) f 在區間 $[-5, 5]$ 是連續的

20. 設 $f(x) = \frac{x^2-4x}{\sqrt{x}}$ ，求 $f'(x)$ 。

- (A) $\frac{3x-4}{2x^{1/2}}$ (B) $\frac{2x-4}{\sqrt{x}}$ (C) $\frac{2x-4}{1/(2\sqrt{x})}$ (D) $x^{3/2} - 4x^{1/2}$

21. 設 $y = 4\sin x - 5\cos x + x$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

- (A) $4\cos x + 5\sin x + 1$ (B) $-4\cos x + 5\sin x + 1$ (C) $4\cos x - 5\sin x + 1$
(D) $4\cos x + 5\sin x$

22. 找出所有點使得函數 $f(x) = x^3 - 2$ 之圖形在該點的切線斜率為 3。

- (A) (1,3), (-1,3) (B) (1,-1), (-1,-3) (C) $(\sqrt[3]{2}, 0)$ (D) (1,3)

23. 設 $y = \frac{x+3}{x-1}$ ，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

- (A) 0 (B) $\frac{-8}{(x-1)^3}$ (C) $\frac{-4}{(x-1)^3}$ (D) $\frac{8}{(x-1)^3}$

24. 設 $f(x) = 7 - \frac{6}{x}$ ，試找出所有 $c \in (1, 6)$ 之值使得 $f'(c) = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1}$ 。

- (A) $\sqrt{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\pm\sqrt{6}$

25. 試利用微分去估計 $\sqrt{4.9}$ 。

- (A) 2.225 (B) 2.250 (C) 2.214 (D) 2.450

26. 試求 $\int 5 \sec x \cdot \tan x \cdot dx$ 。

- (A) $5 \sec^3 x \cdot \tan x + C$ (B) $5 \sec x + C$ (C) $\frac{1}{5} \sec^3 x \cdot \tan x + C$ (D) $5 \tan x + C$

27. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{10i - n}{n^2}$ 之值。

- (A) 5 (B) 10 (C) 9 (D) 4

28. 下列哪一項之和與其他三項之和不同？

- (A) $\sum_{n=0}^5 (3n+1)$ (B) $\sum_{k=1}^6 (3k-2)$ (C) $\sum_{j=3}^8 (3j-8)$ (D) $\sum_{i=1}^6 (i+2)$

29. 試求 $\int_0^2 |x-1| dx$ 。

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

30. 試求 $\cos^{-1}(-1/2)$ 之值。

- (A) $\pi/6$ (B) $\pi/3$ (C) $-\pi/3$ (D) $2\pi/3$

31. 試求 $\sin \left[\cos^{-1} \left(-\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right]$ 之值。

- (A) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (C) $-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$

32. 設 $\frac{3x^2 - 6x + 9}{(x^2 + 9)(x - 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{C}{x - 3}$ ，求 A, B, C 。

- (A) $A = 3, B = -6, C = 9$ (B) $A = 2, B = 2, C = 1$ (C) $A = 3, B = 0, C = -1$
(D) $A = 2, B = 0, C = 1$

33. 請化簡 $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ 。

- (A) 3 (B) $(n+3)(n+2)$ (C) $\frac{n+3}{n+1}$ (D) $(n+3)(n+1)$

34. 試求數列 $\left\{ \frac{-5 + (-1)^n}{n!} \right\}$ 之極限。

- (A) -5 (B) 1 (C) 0 (D) 發散

35. 下列哪一個級數發散？

- (A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (4 + (-1)^n)$ (C) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

36. 下列哪一個級數收斂？

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ (B) $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{7}{3} \right)^n$ (C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$

37. 決定級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收斂與否？

- (A) Diverges by Integral Test (B) Converges by Alternating Series Test
(C) Diverges by n-th Term Test (D) Converges by Ratio Test

38. 求 $f(x) = e^{2x} + 3x$ 在 0 點的泰勒展開式(前四項)。

- (A) $4 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$ (B) $1 + 5x + 4x^2 + 8x^3$ (C) $1 + 5x + 2x^2 + 8x^3$
(D) $1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$

39. 求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x-1)^n$ 之收斂區間。

- (A) (-2, 4) (B) (-3, 3) (C) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$ (D) (2, 4)

40. 求雙曲線 $2y^2 - 9x^2 - 18 = 0$ 之焦點。

- (A) $(\pm\sqrt{11}, 3)$ (B) $(0, \pm\sqrt{7})$ (C) $(0, \pm\sqrt{11})$ (D) $(\pm\sqrt{7}, 0)$

41. 試問二次曲面 $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$ 為一個

- (A) Elliptic paraboloid (B) Hyperbolic paraboloid
(C) Ellipsoid (D) Elliptic cone

42. 試求極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,e)} e^x \cdot \ln y$ 之值。

- (A) 0 (B) e (C) 1 (D) 不存在

43. 設 $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - y^3$ ，求 $f_y(x, y) = ?$

- (A) $2x^2 + 2xy - 3y^3$ (B) $4xy + y^2$ (C) $2x^2 + 2xy - y^3$ (D) $2x^2y + 2xy - 3y^2$

44. 試求 $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2 + 11x - 6$ 之極小值。

- (A) -6 (B) 8 (C) -86 (D) -39

45. 試求 $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y - 3$ 之鞍點(saddle point)。

- (A) (1, -3, 0) (B) (-1, 3, 5) (C) (-1, 3, 0) (D) (1, -3, 5)

46. 求曲面 $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ 以點 (3, 3, 1) 為切點的切平面方程式。

- (A) $x - 4y - 3z = 12$ (B) $x + 4y - 3z = 12$ (C) $x + 4y + 3z = 12$
(D) $x - 4y + 3z = 12$

47. 試求 $\int_0^{\pi} \int_0^{\cos y} x \sin y \, dx \, dy$ 。

- (A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 0

48. 試求 $f(x, y, z) = 30xy + 20xz + 20yz$ 之極小值，其中 x, y, z 滿足限制條件 $xyz = 12$ 。

- (A) 120 (B) 180 (C) 240 (D) 360

49. 試求 $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx$ 。

- (A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{48}$ (C) $\frac{1}{64}$ (D) $\frac{1}{96}$

50. 設 C 為由 (0, 0, 0) 到 (1, -3, 2) 之連線段(line segment)，求 $\int_C (x + y^2 - 2z) \, ds$ 。

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ (C) 10 (D) $-\frac{25}{2}$

金門縣 99 學年度國中正式教師暨代課教師聯合甄選

數學領域初試答案

1	A	26	B
2	B	27	D
3	C	28	D
4	B	29	B
5	A	30	D
6	D	31	B
7	D	32	D
8	A	33	B
9	B	34	C
10	B	35	B
11	D	36	A
12	C	37	B
13	B	38	D
14	B	39	A
15	D	40	C
16	B	41	B
17	C	42	C
18	B	43	A
19	D	44	D
20	A	45	D
21	A	46	B
22	B	47	C
23	D	48	D
24	A	49	C
25	A	50	B

99 金門縣略解

1. [高一]和角公式展開後，可得 $\frac{3}{2}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{3}{2}$
2. [高一]基本題，和是 3
3. [高二] $(1, x, x^2)$ 有 $(2,0,3)(1,2,2)(0,4,1) \Rightarrow \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{4!1!} = 10 + 30 + 5 = 45$
4. [高一]基本題，值是 i 。
5. [高二]基本題，值是 -39 。
6. [微積分]通分後化簡可得 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{x(x+3)} = -\frac{1}{9}$
7. [微積分]原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^3} = 0$
8. [高二]排容，機率为 $1 - (1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{2}{3}) = \frac{11}{12}$
9. [高一]點代進去圓方程開根號就是切線長， $\sqrt{64+16+48+6} = \sqrt{134}$
10. [高一]首先 $x+1 > 0$ ， $x+1 = 9 + x + 2 - 6\sqrt{x+2} \Rightarrow 3\sqrt{x+2} = 5, x = \frac{7}{9}$
11. [國三]配方，原式 $= -3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$
12. [高一]取 \log 值， $12 + 26\log 2 \doteq 19.826$ ，20 位數
13. [高一]同上，取 \log 值， -301.0 ，故表有 301 個 0 在非零數字前
14. [國一]通分合併化簡， $x < 2$
15. [高一]通解為 $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ，但可交換位置，所以共 $3! = 6$
16. [微積分]直接代入，答案是 $-\pi$
17. [微積分]使得分母為 0 的 x 就是所求。有 $-1, 2$
18. [微積分] $f(5) = 3 = 5c - 3, c = \frac{6}{5}$
19. [微積分](D)定義域剛好寫相反。
20. [微積分]原式 $= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3x-4}{\sqrt{x}}$
21. [微積分]基本題，答案(A)
22. [微積分]令 $f'(x) = 3x^2 = 3, x = \pm 1$ ，故選(B)
23. [微積分] $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (-1) \cdot (x-1)^{-2}, \frac{d^2y}{dx^2} = (-4) \cdot (-2) \cdot (x-1)^{-3} = \frac{8}{(x-1)^3}$
24. [微積分-均值定理]令 $f'(x) = \frac{6}{x^2} = 1, x = \pm\sqrt{6}$ (負不合)

25. [微積分]這題有點小小的爭議，沒說要算幾項，不然直接開方應該是(A)。取的初值不同，也會造成結果不同。

26. [微積分]送分題，就(B)

$$27. \text{ [高一]原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \cdot n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n}{n^2} = 4$$

28. [高一]很明顯是(D)

29. [微積分]圖畫出來反而比較快，可以得到兩個等腰直角三角形，面積是 1。

30. [高一]送分題，要注意一下角度的取法。答案是(D)

31. [高一]同上，答案是(B)

32. [高一]分式方程式，易得 $A+C=3$ ， $3C-B=3$ ，選(D)

33. [高一]送分題，答案是(B)

34. [微積分]階乘跑得很快，所以答案是(C)0

35. [微積分](B)是不定值，發散

36. [微積分](A)p 級數， $n=2$ ，收斂

37. [微積分]反而在考英文了，正負交錯，所以選(B)

38. [微積分] $f(0)=1, f'(0)=5, f''(0)=4, f'''(0)=8$ ，記得除以階乘，選(D)

39. [微積分] $R=3, x=-2$ ，發散， $x=4$ ，也發散。故收斂區間 $(-2,4)$

$$40. \text{ [高二]} \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{2} = 1 \text{ (上下型)}, c^2 = 9 + 2 = 11, c = \pm\sqrt{11}, \text{選(C)}$$

41. [微積分]在 xy 平面是雙曲線，在 xz 平面是開口往上的拋物線，在 yz 平面是開口往下的拋物線，所以是雙曲拋物面。也是英文題，選(B)

42. [微積分]直接代，答案是(C)1

43. [微積分]對 y 偏微，所以是(A)

$$44. \text{ [微積分]} \begin{cases} f_x = 2x - y + 11 = 0 \\ f_y = -x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-6, -1) = -39$$

$$45. \text{ [微積分]} \begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = -2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{鞍點}(1, -3, f(1, -3)) = (1, -3, 5)$$

46. [微積分] $\nabla f = (2x, 8y, -18z)$ 將 $(3, 3, 1)$ 代入得 $(6, 24, -18)$ ，該平面法向量可為 $(1, 4, -3)$ ，選(B)

$$47. \text{ [微積分]直接積，原式} = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} \sin y \Big|_0^{\cos y} dy = -\frac{1}{6} \cos^3 y \Big|_0^\pi = \frac{1}{3}$$

$$48. \text{ [微積分]用算幾就好，} \frac{f(x, y, z)}{3} \geq \sqrt[3]{30 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 12^2} = 120, f(x, y, z) \geq 120$$

$$49. \text{ [微積分]直接積，原式} = \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{xyz^2}{2} \Big|_0^y \right) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3 y^4}{8} \Big|_0^x \right) dx = \frac{x^8}{64} \Big|_0^1 = \frac{1}{64}$$

50. [微積分]考到線積分真的讓人倒彈啊。令
$$\begin{cases} x = t \\ y = -3t, t: 0 \rightarrow 1 \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\text{所求} = \int_0^1 [t + (-3t)^2 - 2(2t)^2] \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} dt = \sqrt{14} \int_0^1 (9t^2 - 3t) dt = \frac{3}{2} \sqrt{14}$$