

## 數學領域試題

注意事項：

1. 本試卷共有測驗題 50 題。
2. 每題均為單選題。

1. 試求  $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3})$  之值，其中  $\alpha$  為任意實數。

- (A)  $3/2$  (B) 0 (C) 1 (D)  $1/2$

2. 試求  $\sqrt{3} \tan 30^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ + \cos 60^\circ$  之值。

- (A) 0 (B) 3 (C)  $1/2$  (D) 1

3. 求  $(1+x+x^2)^5$  展開式中  $x^6$  的係數。

- (A) 30 (B) 40 (C) 45 (D) 120

4. 試求  $\frac{1+i}{1-i}$  之值。

- (A)  $-i$  (B)  $i$  (C)  $-2i$  (D)  $2i$

5. 試求行列式  $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$  之值。

- (A)  $-39$  (B) 49 (C)  $-65$  (D) 12

6. 設  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-9} - \frac{x-2}{x(x-3)}$ ，試求  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  之值。

- (A)  $-1$  (B)  $\frac{2}{9}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $-\frac{1}{9}$

7. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+4+5+\cdots+n}{n^3}$  之值。

- (A) 1 (B)  $\infty$  (C)  $-\infty$  (D) 0

8. 甲乙兩人共解一題計算證明題。已知甲能解出之機率為 $\frac{3}{4}$ ，乙能解出之機率為 $\frac{2}{3}$ ，求此題被解出之機率。

(A)  $\frac{11}{12}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{5}{6}$  (D)  $\frac{5}{8}$

9. 求過點 $(8, -4)$ 至圓 $x^2 + y^2 + 6x + 6 = 0$ 之切線長。

(A)  $\sqrt{26}$  (B)  $\sqrt{134}$  (C)  $\sqrt{58}$  (D)  $\sqrt{129}$

10. 試問方程式 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 3$ 之實根的個數。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 無窮多個

11. 試求 $-3x^2 + 4x - 1$ 之極大值。

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D)  $\frac{1}{3}$

12. 試問 $2^8 \times 8^{10} \times 5^{12}$ 為幾位數？

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21

13. 試問 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$ 其小數點與第一個非零數字之間有幾個零？

(A) 300 (B) 301 (C) 302 (D) 303

14. 試解不等式 $\frac{3x}{2} - \frac{2x-1}{3} > 3x-4$ 。

(A)  $x > 2$  (B)  $x < 2$  (C)  $x > 1$  (D)  $x < 1$

15. 試問聯立方程式
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$
共有幾組解？

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

16. 試求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\cos x}$ 之值。

(A)  $\pi$  (B)  $-\pi$  (C)  $\infty$  (D) 0

17. 試問在下列哪些點，函數  $f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-2}$  是不連續的。

- (A) 4    (B) -1, 2, 4    (C) -1, 2    (D) -1, 2, 4, 2

18. 決定一個  $c$  值使得函數  $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 5 \\ cx-3, & x > 5 \end{cases}$  在整個實數線上是連續的。

- (A) 0    (B)  $\frac{6}{5}$     (C) 1    (D)  $\frac{5}{6}$

19. 下列哪些敘述對函數  $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$  來說是錯的。

- (A)  $f$  在  $x = 10$  是連續的    (B)  $f$  在區間  $(-\infty, -5]$  是連續的  
(C)  $f$  在區間  $[5, \infty)$  是連續的    (D)  $f$  在區間  $[-5, 5]$  是連續的

20. 設  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x}}$ ，求  $f'(x)$ 。

- (A)  $\frac{3x-4}{2x^{1/2}}$     (B)  $\frac{2x-4}{\sqrt{x}}$     (C)  $\frac{2x-4}{1/(2\sqrt{x})}$     (D)  $x^{3/2} - 4x^{1/2}$

21. 設  $y = 4\sin x - 5\cos x + x$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。

- (A)  $4\cos x + 5\sin x + 1$     (B)  $-4\cos x + 5\sin x + 1$     (C)  $4\cos x - 5\sin x + 1$   
(D)  $4\cos x + 5\sin x$

22. 找出所有點使得函數  $f(x) = x^3 - 2$  之圖形在該點的切線斜率為 3。

- (A)  $(1, 3), (-1, 3)$     (B)  $(1, -1), (-1, -3)$     (C)  $(\sqrt[3]{2}, 0)$     (D)  $(1, 3)$

23. 設  $y = \frac{x+3}{x-1}$ ，求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

- (A) 0    (B)  $\frac{-8}{(x-1)^3}$     (C)  $\frac{-4}{(x-1)^3}$     (D)  $\frac{8}{(x-1)^3}$

24. 設  $f(x) = 7 - \frac{6}{x}$ ，試找出所有  $c \in (1, 6)$  之值使得  $f'(c) = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1}$ 。

- (A)  $\sqrt{6}$     (B)  $\frac{6}{7}$     (C)  $\frac{7}{2}$     (D)  $\pm\sqrt{6}$

25. 試利用微分去估計 $\sqrt{4.9}$ 。

- (A) 2.225    (B) 2.250    (C) 2.214    (D) 2.450

26. 試求 $\int 5 \sec x \cdot \tan x \cdot dx$ 。

- (A)  $5 \sec^3 x \cdot \tan x + C$     (B)  $5 \sec x + C$     (C)  $\frac{1}{5} \sec^3 x \cdot \tan x + C$     (D)  $5 \tan x + C$

27. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{10i-n}{n^2}$ 之值。

- (A) 5    (B) 10    (C) 9    (D) 4

28. 下列哪一項之和與其他三項之和不同？

- (A)  $\sum_{n=0}^5 (3n+1)$     (B)  $\sum_{k=1}^6 (3k-2)$     (C)  $\sum_{j=3}^8 (3j-8)$     (D)  $\sum_{i=1}^6 (i+2)$

29. 試求 $\int_0^2 |x-1| dx$ 。

- (A) 0    (B) 1    (C)  $\frac{1}{2}$     (D) 2

30. 試求 $\cos^{-1}(-1/2)$ 之值。

- (A)  $\pi/6$     (B)  $\pi/3$     (C)  $-\pi/3$     (D)  $2\pi/3$

31. 試求 $\sin\left[\cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right]$ 之值。

- (A)  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$     (B)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$     (C)  $-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$     (D)  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$

32. 設 $\frac{3x^2-6x+9}{(x^2+9)(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{C}{x-3}$ ，求 $A, B, C$ 。

- (A)  $A=3, B=-6, C=9$     (B)  $A=2, B=2, C=1$     (C)  $A=3, B=0, C=-1$   
(D)  $A=2, B=0, C=1$

33. 請化簡 $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ 。

- (A) 3    (B)  $(n+3)(n+2)$     (C)  $\frac{n+3}{n+1}$     (D)  $(n+3)(n+1)$

34. 試求數列  $\left\{ \frac{-5 + (-1)^n}{n!} \right\}$  之極限。

- (A)  $-5$     (B)  $1$     (C)  $0$     (D) 發散

35. 下列哪一個級數發散？

- (A)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$     (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (4 + (-1)^n)$     (C)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$     (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

36. 下列哪一個級數收斂？

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$     (B)  $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left( \frac{7}{3} \right)^n$     (C)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$     (D)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$

37. 決定級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  收斂與否？

- (A) Diverges by Integral Test    (B) Converges by Alternating Series Test  
(C) Diverges by n-th Term Test    (D) Converges by Ratio Test

38. 求  $f(x) = e^{2x} + 3x$  在 0 點的泰勒展開式(前四項)。

- (A)  $4 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$     (B)  $1 + 5x + 4x^2 + 8x^3$     (C)  $1 + 5x + 2x^2 + 8x^3$   
(D)  $1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$

39. 求冪級數  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x-1)^n$  之收斂區間。

- (A)  $(-2, 4)$     (B)  $(-3, 3)$     (C)  $\left( \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$     (D)  $(2, 4)$

40. 求雙曲線  $2y^2 - 9x^2 - 18 = 0$  之焦點。

- (A)  $(\pm\sqrt{11}, 3)$     (B)  $(0, \pm\sqrt{7})$     (C)  $(0, \pm\sqrt{11})$     (D)  $(\pm\sqrt{7}, 0)$

41. 試問二次曲面  $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$  為一個

- (A) Elliptic paraboloid    (B) Hyperbolic paraboloid  
(C) Ellipsoid    (D) Elliptic cone

42. 試求極限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,e)} e^x \cdot \ln y$  之值。

- (A) 0 (B)  $e$  (C) 1 (D) 不存在

43. 設  $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - y^3$ ，求  $f_y(x, y) = ?$

- (A)  $2x^2 + 2xy - 3y^3$  (B)  $4xy + y^2$  (C)  $2x^2 + 2xy - y^3$  (D)  $2x^2y + 2xy - 3y^2$

44. 試求  $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2 + 11x - 6$  之極小值。

- (A) -6 (B) 8 (C) -86 (D) -39

45. 試求  $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y - 3$  之鞍點(saddle point)。

- (A) (1, -3, 0) (B) (-1, 3, 5) (C) (-1, 3, 0) (D) (1, -3, 5)

46. 求曲面  $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$  以點 (3, 3, 1) 為切點的切平面方程式。

- (A)  $x - 4y - 3z = 12$  (B)  $x + 4y - 3z = 12$  (C)  $x + 4y + 3z = 12$   
(D)  $x - 4y + 3z = 12$

47. 試求  $\int_0^\pi \int_0^{\cos y} x \sin y \, dx \, dy$ 。

- (A)  $-\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D) 0

48. 試求  $f(x, y, z) = 30xy + 20xz + 20yz$  之極小值，其中  $x, y, z$  滿足限制條件  $xyz = 12$ 。

- (A) 120 (B) 180 (C) 240 (D) 360

49. 試求  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx$ 。

- (A)  $\frac{1}{32}$  (B)  $\frac{1}{48}$  (C)  $\frac{1}{64}$  (D)  $\frac{1}{96}$

50. 設  $C$  為由 (0, 0, 0) 到 (1, -3, 2) 之連線段(line segment)，求  $\int_C (x + y^2 - 2z) \, ds$ 。

- (A)  $\frac{3}{2}$  (B)  $\frac{3}{2}\sqrt{14}$  (C) 10 (D)  $-\frac{25}{2}$

金門縣 99 學年度國中正式教師暨代課教師聯合甄選  
數學領域初試答案

1	<b>A</b>	26	<b>B</b>
2	<b>B</b>	27	<b>D</b>
3	<b>C</b>	28	<b>D</b>
4	<b>B</b>	29	<b>B</b>
5	<b>A</b>	30	<b>D</b>
6	<b>D</b>	31	<b>B</b>
7	<b>D</b>	32	<b>D</b>
8	<b>A</b>	33	<b>B</b>
9	<b>B</b>	34	<b>C</b>
10	<b>B</b>	35	<b>B</b>
11	<b>D</b>	36	<b>A</b>
12	<b>C</b>	37	<b>B</b>
13	<b>B</b>	38	<b>D</b>
14	<b>B</b>	39	<b>A</b>
15	<b>D</b>	40	<b>C</b>
16	<b>B</b>	41	<b>B</b>
17	<b>C</b>	42	<b>C</b>
18	<b>B</b>	43	<b>A</b>
19	<b>D</b>	44	<b>D</b>
20	<b>A</b>	45	<b>D</b>
21	<b>A</b>	46	<b>B</b>
22	<b>B</b>	47	<b>C</b>
23	<b>D</b>	48	<b>D</b>
24	<b>A</b>	49	<b>C</b>
25	<b>A</b>	50	<b>B</b>

99 金門縣略解

1. [高一]和角公式展開後，可得  $\frac{3}{2}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{3}{2}$
2. [高一]基本題，和是 3
3. [高二]  $(1, x, x^2)$  有  $(2, 0, 3)(1, 2, 2)(0, 4, 1) \Rightarrow \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{4!1!} = 10 + 30 + 5 = 45$
4. [高一]基本題，值是  $i$ 。
5. [高二]基本題，值是  $-39$ 。
6. [微積分]通分後化簡可得  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{x(x+3)} = -\frac{1}{9}$
7. [微積分]原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = 0$
8. [高二]排容，機率為  $1 - (1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{2}{3}) = \frac{11}{12}$
9. [高一]點代進去圓方程開根號就是切線長， $\sqrt{64 + 16 + 48 + 6} = \sqrt{134}$
10. [高一]首先  $x+1 > 0$ ， $x+1 = 9 + x + 2 - 6\sqrt{x+2} \Rightarrow 3\sqrt{x+2} = 5, x = \frac{7}{9}$
11. [國三]配方，原式  $= -3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$
12. [高一]取  $\log$  值， $12 + 26\log 2 \doteq 19.826$ ，20 位數
13. [高一]同上，取  $\log$  值， $-301.0$ ，故表有 301 個 0 在非零數字前
14. [國一]通分合併化簡， $x < 2$
15. [高一]通解為  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ，但可交換位置，所以共  $3! = 6$
16. [微積分]直接代入，答案是  $-\pi$
17. [微積分]使得分母為 0 的  $x$  就是所求。有  $-1, 2$
18. [微積分]  $f(5) = 3 = 5c - 3, c = \frac{6}{5}$
19. [微積分](D)定義域剛好寫相反。
20. [微積分]原式  $= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3x-4}{\sqrt{x}}$
21. [微積分]基本題，答案(A)
22. [微積分]令  $f'(x) = 3x^2 = 3, x = \pm 1$ ，故選(B)
23. [微積分]  $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot (-1) \cdot (x-1)^{-2}, \frac{d^2y}{dx^2} = (-4) \cdot (-2) \cdot (x-1)^{-3} = \frac{8}{(x-1)^3}$
24. [微積分—均值定理]令  $f'(x) = \frac{6}{x^2} = 1, x = \pm\sqrt{6}$ (負不合)



25. [微積分]這題有點小小的爭議，沒說要算幾項，不然直接開方應該是(A)。取的初值不同，也會造成結果不同。

26. [微積分]送分題，就(B)

27. [高一]原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \cdot n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n}{n^2} = 4$

28. [高一]很明顯是(D)

29. [微積分]圖畫出來反而比較快，可以得到兩個等腰直角三角形，面積是 1。

30. [高一]送分題，要注意一下角度的取法。答案是(D)

31. [高一]同上，答案是(B)

32. [高一]分式方程式，易得  $A+C=3$ ， $3C-B=3$ ，選(D)

33. [高一]送分題，答案是(B)

34. [微積分]階乘跑得很快，所以答案是(C)0

35. [微積分](B)是不定值，發散

36. [微積分](A)p 級數， $n=2$ ，收斂

37. [微積分]反而在考英文了，正負交錯，所以選(B)

38. [微積分]  $f(0)=1, f'(0)=5, f''(0)=4, f'''(0)=8$ ，記得除以階乘，選(D)

39. [微積分]  $R=3$ ， $x=-2$ ，發散， $x=4$ ，也發散。故收斂區間 $(-2,4)$

40. [高二]  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{2} = 1$ (上下型)， $c^2 = 9 + 2 = 11$ ， $c = \pm\sqrt{11}$ ，選(C)

41. [微積分]在  $xy$  平面是雙曲線，在  $xz$  平面是開口往上的拋物線，在  $yz$  平面是開口往下的拋物線，所以是雙曲拋物面。也是英文題，選(B)

42. [微積分]直接代，答案是(C)1

43. [微積分]對  $y$  偏微，所以是(A)

44. [微積分]  $\begin{cases} f_x = 2x - y + 11 = 0 \\ f_y = -x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-6, -1) = -39$

45. [微積分]  $\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = -2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{鞍點}(1, -3, f(1, -3)) = (1, -3, 5)$

46. [微積分]  $\nabla f = (2x, 8y, -18z)$  將  $(3, 3, 1)$  代入得  $(6, 24, -18)$ ，該平面法向量可為  $(1, 4, -3)$ ，選(B)

47. [微積分]直接積，原式 =  $\int_0^\pi \frac{x^2}{2} \sin y \Big|_0^{\cos y} dy = -\frac{1}{6} \cos^3 y \Big|_0^\pi = \frac{1}{3}$

48. [微積分]用算幾就好， $\frac{f(x, y, z)}{3} \geq \sqrt[3]{30 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 12^2} = 120$ ， $f(x, y, z) \geq 120$

49. [微積分]直接積，原式 =  $\int_0^1 \int_0^x \left( \frac{xyz^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) dy dx = \int_0^1 \left( \frac{x^3 y^4}{8} \Big|_0^x \right) dx = \frac{x^8}{64} \Big|_0^1 = \frac{1}{64}$

50. [微積分]考到線積分真的讓人倒彈啊。令  $\begin{cases} x=t \\ y=-3t, t:0 \rightarrow 1 \\ z=2t \end{cases}$

$$\text{所求} = \int_0^1 [t + (-3t)^2 - 2(2t)^2] \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} dt = \sqrt{14} \int_0^1 (9t^2 - 3t) dt = \frac{3}{2} \sqrt{14}$$