國立臺中教育大學 101 學年度教師專業碩士學位學程招生考試

數學試題

一、填充題（84%，每格 4%）

1. 設動點 P 到點 $(1,1)$ 之距離與到直線 $y=-1$ 之距離相等，則動點 P 之軌跡方程式為(　　　　　)。

2. 設 $\log 2 = 0.301$，$10 < x < 100$，且 $\log 2x = a + b$，$\log x = c + d$，其中 a, c 為首數，b, d 為尾數。若 $b = 2d$，則 $a =$(　　　　　) 且 $x =$(　　　　　)。

3. 某茶葉加工廠，專門生產烏龍茶與高山茶，且該工廠共分作業與品管兩個部門。假設該工廠之作業部門，裝填每罐烏龍茶時需 16 分鐘，裝填每罐高山茶時需 8 分鐘。另外，品管部門檢核每罐烏龍茶時需 8 分鐘，檢核每罐高山茶時需 16 分鐘。假設每天之工作時數為 8 小時，且烏龍茶每罐可獲利新台幣 50 元，而高山茶每罐可獲利新台幣 30 元，則該工廠一天要生產烏龍茶(　　　　　)罐和高山茶(　　　　　)罐，才能獲得最大利益。

4. 設 $Z = a + bi$，其中 $i = \sqrt{-1}$，則 Z 可以表示成 $Z = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$，這裡 $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$。當 $0 \le \theta < 2\pi$ 時，稱 θ 為(　　　　　)角。若以 $2(1-i)\left(1-\sqrt{3}i\right)$ 為例，則此角為(　　　　　)。

5. 若 $3 = k \times 2^r$ 且 $15 = k \times 4^r$，則 $r =$(　　　　　)。

6. 若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$，則 $\begin{vmatrix} 2a-3b & 3b \\ 2c-3d & 3d \end{vmatrix}$ 之值為(　　　　　)。

7. 箱中有三顆紅球與三顆白球，從箱中同時隨機抽出兩顆球，則兩顆球顏色不同之機率為(　　　　　)。此外，如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金，請問獎金的期望值為(　　　　　)。

8. 若隨機取出 60 的一個正因數，則此數字小於 7 的機率為(　　　　　)，而此數字為偶數的機率為(　　　　　)。

9. 若 $\log_2 x^2 + \log_2(2x-1) < \log_2 x$，求 x 解集合為(　　　　　)。

10. 若 $\log_x 2 + \log_{(x^2)} 8 = 5$，則 $x =$(　　　　)。

11. 通過 $(1,-2)$ 、 $(2,-4)$ 、 $(4,0)$ 三點，且開口向左或向右的拋物線方程式為(　　　　)。

12. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$ 的四個根為(　　　　)。

13. $f(x) = 2\cos(3x+4)$ 的週期是(　　　　)。

14. 試求 $3\sin x + 4\cos x = \frac{5}{2}$ 的所有實數解 $x =$(　　　　)。

15. $\vec{a} = (3,-4)$ 在 $\vec{b} = (-1,2)$ 上的正射影長度為(　　　　)。

16. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，則 A 的反矩陣 $A^{-1} =$(　　　　)。

二、計算證明題（16%，每題8%，請務必寫出計算過程和結果）

1. 設 a,b,c 為正數，且滿足 $abc = 1$，請證明

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

2. 試求過點 $(1,3)$ 與雙曲線 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 相切的所有直線方程式。