正三角形和正四面体的优美定值

罗建宇

（张家港市暨阳高级中学，江苏　215600）

用解析法可以得到正三角形的一个优美定值如下：

定理 1　若正三角形的边长为 a，以其中心为圆心的圆半径为 r，则该圆上任意一点与该正三角形各顶点连线段长度的平方和及四次方和均是定值.

证明　设正 $\triangle ABC$ 的中心为 O，由正三角形的性质，以 O 为原点，以 OA 为 y 轴，如图建立平面直角坐标系，则 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{3}a)$，$B(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{6}a)$，$C(\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{6}a)$，设 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$，则

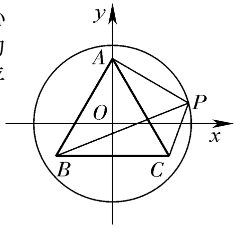

图 1

$PA^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{3}a)^2$，$PB^2 = (r\cos\theta + \frac{1}{2}a)^2 + (r\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}a)^2$，$PC^2 = (r\cos\theta - \frac{1}{2}a)^2 + (r\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}a)^2$，

故 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3r^2 + a^2$（定值）.

类似地，计算可知

$$PA^4 + PB^4 + PC^4 = 3(r^2 + \frac{1}{3}a^2)^2 + 2a^2r^2$$

$$= 3r^4 + \frac{1}{3}a^4 + 4a^2r^2\text{（定值）}.$$

特别地，若此圆为正三角形的外接圆，则 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$；若此圆为正三角形的内切圆，则 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$，因此有：

推论 1.1　若正三角形 ABC 的边长为 a，P 是其处接圆上任意一点，则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2a^2$，$PA^4 + PB^4 + PC^4 = 2a^4$.

推论 1.2　若正三角形 ABC 的边长为 a，P 是其内切圆上任意一点，则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{5}{4}a^2$，$PA^4 + PB^4 + PC^4 = \frac{11}{16}a^4$.

正三角形有以上优美定值，类比到正四面体是否有类似的定值呢？

定理 2　若正四面体的棱长为 a，以其中心为球心的球半径为 R，则该球上任意一点与该正四面体各顶点连线段长度的平方和及四次方和均是定值.

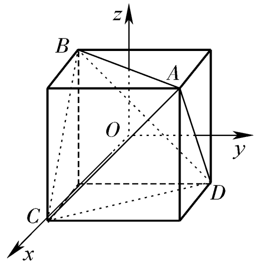

图 2

证明　将正四面体内接于一个正方体，其中心 O 即为此正方体中心，如图 2 所示，以 O 为原点，以平行于正方体各表面的平面为坐标平面建立空间直角坐标系，则 $A(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$，$B(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$，$C(\frac{\sqrt{2}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a)$，$D(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a)$.

设 $P(R\cos\alpha\sin\beta, R\cos\alpha\cos\beta, R\sin\alpha)$，则

$$PA^2 = (R\cos\alpha\sin\beta - \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\cos\alpha\cos\beta - \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2,$$

$$PB^2 = (R\cos\alpha\sin\beta + \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\cos\alpha\cos\beta + \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2,$$

$$PC^2 = (R\cos\alpha\sin\beta - \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\cos\alpha\cos\beta + \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2,$$

$$PD^2 = (R\cos\alpha\sin\beta + \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\cos\alpha\cos\beta - \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2 + (R\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{4}a)^2.$$

故 $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2 + \frac{3}{2}a^2$（定值）.

类似地，计算可得

$$PA^4 + PB^4 + PC^4 + PD^4 = 4(R^2 + \frac{3}{8}a^2)^2 + 4 \times \frac{1}{2}a^2R^2 = 4R^4 + \frac{9}{16}a^4 + 5R^2a^2\text{（定值）}.$$

特别地，若此球为正四面体的外接球，则 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$；若此球为正四面体的内切球，则 $R = \frac{\sqrt{6}}{12}a$. 因此有：

推论 2.1　若正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，P 是其外接球上任意一点，则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 3a^2$，$PA^4 + PB^4 + PC^4 + PD^4 = 3a^4$.

推论 2.2　若正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，p 是其内切球上任意一点，则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{3}a^2$，$PA^4 + PB^4 + PC^4 + PD^4 = \frac{7}{9}a^4$.

（收稿日期：2007－06－14）