

# 99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科試題

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

- ( ) 1. 偶數集合與自然數集合可以建立如下——對應關係： $n \leftrightarrow 2n$ ，因此，  
 ① 偶數與自然數的個數一樣多      ② 偶數個數少於自然數個數  
 ③ 偶數個數與自然數個數不能比較      ④ 自然數個數比偶數個數大一倍
- ( ) 2. 代數基本定理與下列哪一選項有關？  
 ① 與代數運算法則有關      ② 與代數方程式的判別式有關  
 ③ 與算術基本定理有關      ④ 與代數方程式的根之存在有關
- ( ) 3. 二次方程式的判別式與下列哪一選項最有關係？  
 ① 與兩根是否相等有關      ② 與根的正負有關      ③ 與二次項係數的正負有關      ④ 以上皆非
- ( ) 4. 有關餘弦定律與畢氏定理之關係，試問下列何者正確？  
 ① 兩者無關，因為一個是三角學定律，另一個是幾何學定理      ② 前者是後者的延拓  
 ③ 前者是後者的特例      ④ 前者討論一般三角形，後者針對直角三角形，因此，無法比較
- ( ) 5. 如何定義 $2^{\sqrt{2}}$ ？下列哪一個選項不相干？  
 ① 考慮函數 $y = 2^x$ ，代入 $x = \sqrt{2}$ 即可      ② 依據實數完備性  
 ③ 要先知道 $2^2$ 如何定義      ④ 考慮有理數列 $r_n$ 收斂到 $\sqrt{2}$
- ( ) 6. 給定方程式 $5x - 7y = 3$ ，試求其整數解，則下列選項不適用？  
 ① 可以運用尤（歐）拉法      ② 可以運用輾轉相除法      ③ 此一方程有整數解      ④ 此一方程無整數解
- ( ) 7. 下列哪一個選項中的分數等於循環小數 $0.\overline{08}$ ？  
 ①  $\frac{8}{99}$       ②  $\frac{8}{100}$       ③  $\frac{8}{101}$       ④  $\frac{8}{102}$
- ( ) 8. 平面上二向量 $\alpha$ 、 $\beta$ ，已知 $\alpha + \beta$ 和 $\beta$ 的長度相等，請選出正確的選項：  
 ①  $(\alpha + \beta) \cdot \alpha - \beta \cdot \alpha = 0$       ②  $(\alpha + \beta) \cdot \alpha + \beta \cdot \alpha = 0$       ③  $(\alpha + \beta) \cdot \alpha = 0$       ④  $\alpha \cdot \beta = 0$
- ( ) 9. 在一個骰子的六個面上隨意刻上 1 到 6 點，總共有幾種刻法？  
 ① 2 種      ② 15 種      ③ 30 種      ④ 120 種
- ( ) 10. 若 P、Q、A 代表命題（或敘述）， $\neg P$  代表 P 的逆命題等等。運用真值表，找出下列選項中無效的推論形式：  
 ①  $A \Rightarrow A$       ②  $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$       ③ 若 $\sqrt{2}$ 為有理數，則 3 為偶數      ④ 若 $\sqrt{2}$ 為無理數，則 3 為偶數
- ( ) 11. 一銳角三角形 $\triangle ABC$ 中 P 為其重心，令 $x, y, z$ 表示 P 至三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 之垂直線段長，則 $x : y : z = ?$   
 ①  $\sin A : \sin B : \sin C$       ②  $\cos A : \cos B : \cos C$       ③  $\tan A : \tan B : \tan C$       ④  $\csc A : \csc B : \csc C$
- ( ) 12. 一袋中有七個號碼球分別是編號 1~7，若取出其中相異四個球(不放回)，則其數字編號加總之和為偶數的機率是？  
 ①  $\frac{16}{35}$       ②  $\frac{18}{35}$       ③  $\frac{19}{35}$       ④  $\frac{21}{35}$
- ( ) 13. 設 $a \in R$ ，若 $\frac{3-i}{1-i} + \frac{a+i}{1+i}$ 亦為實數，則 $a = ?$   
 ① 3      ② 2      ③ 1      ④  $\frac{2}{3}$
- ( ) 14. 在平面上，給定一個單位長，則下列哪一長度無法以尺規作圖作出？  
 ①  $\sqrt{2}$       ②  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$       ③  $\sqrt[3]{2}$       ④  $\sqrt[4]{2}$

99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科試題

- ( )15.若  $(x, y)$  為給定橢圓  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  上的點，則  $x^2 + y^2$  的最小值為？  
 ①5 ②9 ③16 ④25
- ( )16.將一個籃球剪開有限多刀之後，無法完全攤成平面，下列哪一選項不是其原因之一？  
 ① 平面的高斯曲率為 0 ② 球面之高斯曲率不為 0  
 ③ 球極射影(stereographic projection)可以將球面映成平面 ④ 球面與平面之間不存在等距變換
- ( )17.三角形的三個頂點均在單位圓的圓周上，則其面積的最大值為？  
 ①  $\frac{1}{4}\sqrt{27}$  ②  $\frac{1}{2}\sqrt{27}$  ③  $\frac{1}{3}\sqrt{27}$  ④  $\sqrt{27}$
- ( )18.坐標平面上  $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$  的軌跡圖形是？  
 ① 拋物線 ② 圓 ③ 橢圓 ④ 雙曲線
- ( )19.單位圓的外切直角三角形面積的最小值是？  
 ①  $3 + 2\sqrt{2}$  ② 5 ③  $6 - \sqrt{2}$  ④  $6 + \sqrt{2}$
- ( )20.空間中一平行六面體之一頂點座標  $(-1, 2, 2)$  其相鄰之三頂點座標分別為  $(0, 1, 1)$ ,  $(-3, -2, 4)$ ,  $(-4, 6, 8)$ ，則其體積為？  
 ①16 ②18 ③20 ④22
- ( )21.正圓錐高度為  $1\text{cm}$ ，半徑為  $3\text{cm}$ 。若有一正圓柱內接於此正圓錐，則其最大體積為？  
 ①  $\frac{3\pi}{4}\text{cm}^3$  ②  $\frac{4\pi}{3}\text{cm}^3$  ③  $\frac{3\pi}{2}\text{cm}^3$  ④  $\frac{5\pi}{4}\text{cm}^3$
- ( )22.由曲面  $(x - y)^2 - z^2 = 1$  至原點之最短距離為？  
 ①  $\sqrt{2}$  ②  $\frac{1}{2}$  ③  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ④ 1
- ( )23.在平面上，兩直線  $l_1$ 、 $l_2$  被第三條直線所截，且同側內角和小於  $180$  度，則  
 ① 同位角相等 ② 內錯角相等 ③  $l_1$ 、 $l_2$  相交 ④  $l_1$ 、 $l_2$  平行
- ( )24.指數函數  $e^x$  與對數函數  $\log x$  互為反函數，則  
 ① 這兩個圖形對  $x$ -軸成對稱 ② 這兩個圖形對  $y$ -軸成對稱  
 ③ 這兩個函數同時是遞增函數 ④ 這兩個圖形對  $y=x$  成對稱
- ( )25.給定  $f$  為定義在實數軸上的實值連續函數，而且非常數函數，則  $f$  將區間  $[a, b]$  映成  $[c, d]$ 。下列哪一個選項與此一命題的證明無關？  
 ①  $f$  將連通集映成連通集 ② 實數軸上的連通集為區間 ③  $f$  將緊緻集映成緊緻集 ④  $f$  的反函數存在
- ( )26.函數  $f(x) = 3x^4 - 4x^3$  在閉區間  $[0, 2]$  上的最小值是哪一个選項？  
 ① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1
- ( )27.令函數  $f(x) = 4x + 2\ln x$ ，而  $g$  為  $f$  的反函數，求  $g'(4) = ?$   
 ①  $\frac{1}{4}$  ②  $\frac{1}{5}$  ③  $\frac{1}{6}$  ④  $\frac{1}{8}$
- ( )28.將  $f(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & x + 4 & 2x \\ 2x + 3 & x - 5 & x^2 \\ x^2 + 2 & 2x^3 & x + 2 \end{vmatrix}$  除以  $x^2 + x - 2$  可得餘式  $g(x) = ax + b$ ，則  
 ①  $g(1) = 0$  ②  $g(-1) = 0$  ③  $g(0) = 1$  ④  $g(0) = -1$

99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科試題

- ( )29. 若  $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$  ;  $x \neq 0$  , 則下列敘述何者正確?
- ① 若  $f(0) = 0$  , 則  $f(x)$  在  $x = 0$  點為連續 ② 若  $f(0) = 1/2$  , 則  $f(x)$  在  $x = 0$  點為連續  
 ③ 若  $f(0) = 1$  , 則  $f(x)$  在  $x = 0$  點為連續 ④  $f(0)$  為任何值,  $f(x)$  在  $x = 0$  不連續
- ( )30. 若  $f(x)$  在收斂區間  $I = \{x: x_0 - r < x < x_0 + r, r > 0\}$  中可以展開成爲冪級數  $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$  , 則下列哪一個選項不成立?
- ①  $f(x)$  在  $x = x_0$  可以展開成爲泰勒級數 ②  $f'(x) = \sum_{n=1} a_n(x-x_0)^{n-1}$   
 ③  $\int f(x)dx = \sum \int a_n(x-x_0)^n dx$  ④  $\sum a_n(x-x_0)^n$  在  $I$  內不會絕對收斂
- ( )31.  $1-1+1-1+1\dots$  的和等於?
- ① 0 ② 1 ③  $\frac{1}{2}$  ④ 以上皆非
- ( )32. 已知斐波那契數列如下: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... , 其中  $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$  ,  $n=1, 2, 3, \dots$  且  $a_0 = a_1 = 1$  。則下列哪一選項不是事實?
- ① 數列  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  的極限爲  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ②  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  稱爲黃金比 ③ 數列  $a_n$  不收斂 ④ 數列  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  遞增
- ( )33. 冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  的收斂區間是哪一個選項?
- ①  $[-1, 1]$  ②  $(-1, 1]$  ③  $(-1, 1)$  ④  $[-1, 1)$
- ( )34.  $x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}$  是下列哪一個函數的馬克勞林級數的前三項?
- ①  $\cos x$  ②  $\sin(x^2)$  ③  $\sin x$  ④  $\tan x$
- ( )35. 級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = ?$
- ①  $\frac{1}{2}$  ②  $\frac{1}{4}$  ③  $\frac{1}{3}$  ④  $\frac{1}{6}$
- ( )36.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$  的收斂半徑爲?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④  $\sqrt{2}$
- ( )37. 下列哪一個變換將平面上的平行線映射成另一個平面上的平行線?
- ①  $T(x, y) = (2x+y, x-3y)$  ②  $T(x, y) = (x^2, y)$  ③  $T(x, y) = (0, 3x+y^2)$  ④  $T(x, y) = (\sin x, \cos y)$
- ( )38. 給定  $ad - bc > 0$  , 變換  $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$  , 則下列哪一個選項不成立?
- ①  $T$  爲線性變換 ②  $T$  將正方形映射成平行四邊形  
 ③  $ad - bc$  代表變換前後的面積伸縮率 ④  $T$  將直線映射成座標原點
- ( )39. 設  $e, f$  是平面向量的一組基底,  $T$  是一個線性變換。  $T(e) = 3e$  、  $T(f) = e + 2f$  , 則下列哪個向量是  $T$  的特徵向量(eigenvector)?
- ①  $f$  ②  $e+f$  ③  $f-e$  ④  $f+2e$

( ) 40. 下列哪一個選項等於  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left( \sqrt{n + \frac{1}{2}} \right)$  ?

- ①  $\frac{1}{4}$    ②  $\frac{1}{3}$    ③  $\frac{1}{2}$    ④ 1

( ) 41.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x+1} (\sqrt{3x} - \sqrt{3x-1}) = ?$

- ①  $\frac{1}{\sqrt{3}}$    ②  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$    ③  $2\sqrt{3}$    ④  $\infty$

( ) 42.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}} \int_x^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t} dt = ?$

- ① -1   ② 1   ③ 0   ④ 不存在

( ) 43. 下列哪一個選項代表不定積分  $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$  ?

- ①  $\ln \tan x + C$    ②  $\ln |\tan x| + C$    ③  $\tan x + C$    ④  $\sec x + C$

( ) 44. 設  $f(t) = \int_0^t 2x \cos(x^2) dx$ ，則  $f'(t) = ?$  請選出正確的選項。

- ①  $\sin t$    ②  $2t \cos t$    ③  $2t \cos(t^2)$    ④  $\sin(t^2)$

( ) 45. 求瑕積分  $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = ?$

- ①  $\frac{\pi^2}{2}$    ②  $\frac{\pi^2}{4}$    ③  $\frac{\pi^2}{6}$    ④  $\frac{\pi^2}{8}$

( ) 46. 下列何者為線性獨立?

- ①  $(1, 2, -3, 1), (4, 0, 0, 2), (6, 4, -6, 4)$  in  $R^4$    ②  $(1, -2), (4, 1), (6, 6)$  in  $R^2$   
 ③  $(-2, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 2), (1, -1, 3, 3, 1)$  in  $R^5$    ④  $(1, -6, 2), (-1, 4, -3), (1, 16, -7)$  in  $R^3$

( ) 47. 下面哪一個選項中的矩陣代表平面上的鏡射?

- ①  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$    ②  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$    ③  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$    ④  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

( ) 48. 下面哪一個矩陣的秩(rank)等於 2?

- ①  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$    ②  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$    ③  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$    ④  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

( ) 49.  $A$ 、 $B$  是兩個  $2 \times 2$  階的實係數，非零的矩陣，並且  $AB = 0$ 。下列哪一個選項中有關矩陣行列式的性質是正確的?

- ①  $A$  的行列式不為 0   ②  $A$  的行列式為 0   ③  $B$  的行列式不為 0   ④  $A+B$  的行列式為 0

( ) 50. 兩個  $2 \times 2$  階矩陣  $A$  和  $B$ ， $A$  代表旋轉， $B$  代表鏡射， $I$  是單位矩陣，請選出正確的選項。

- ①  $B$  的行列式為 1   ②  $AB$  的行列式為 -1   ③  $A$  的行列式為 -1   ④  $BA$  的行列式為 1

99 學年度中區六縣市政府教師甄選策略聯盟 國民中學數學科正確答案

|    |       |    |    |       |       |
|----|-------|----|----|-------|-------|
| 題號 | 1     | 2  | 3  | 4     | 5     |
| 答案 | ①     | ④  | ①  | ②     | ①     |
| 題號 | 6     | 7  | 8  | 9     | 10    |
| 答案 | ④     | ①  | ②  | ③     | ④     |
| 題號 | 11    | 12 | 13 | 14    | 15    |
| 答案 | ④     | ③  | ①  | ③     | ②     |
| 題號 | 16    | 17 | 18 | 19    | 20    |
| 答案 | ③     | ①  | ③  | ①     | ②     |
| 題號 | 21    | 22 | 23 | 24    | 25    |
| 答案 | ②     | ③  | ③  | ③ 或 ④ | ④     |
| 題號 | 26    | 27 | 28 | 29    | 30    |
| 答案 | ①     | ③  | ②  | ④     | ② 或 ④ |
| 題號 | 31    | 32 | 33 | 34    | 35    |
| 答案 | ④     | ④  | ①  | ②     | ①     |
| 題號 | 36    | 37 | 38 | 39    | 40    |
| 答案 | ④     | ①  | ④  | ③     | ③     |
| 題號 | 41    | 42 | 43 | 44    | 45    |
| 答案 | ①     | ①  | ②  | ③     | ④     |
| 題號 | 46    | 47 | 48 | 49    | 50    |
| 答案 | ③ 或 ④ | ②  | ②  | ②     | ②     |

99 中區略解

1. [理論]一個蘿蔔一個坑，所以一樣多。
2. [理論]代數基本定理：(複係數)一元  $n$  次方程式至少有一個複數根。
3. [理論]判別式  $= 0$ ，則兩根相等。
4. [理論]餘弦定律包含畢氏定理。後者是前者的特例。
5. [理論]①倒果為因。
6. [理論] $(5,7)=1$ ， $5x-7y=3$  必有整數解。
7. [高一]令  $x = 0.08 \Rightarrow 100x = 8.08 \Rightarrow 99x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{99}$

8. [高一]按題意，則  $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$ ，代入檢查後選②。

9. [高二]  $\frac{6!}{6 \times 4} = 30$

10. [邏輯]用真值表就知道③對④錯。

11. [高一]也是抄來的，類似 99 北縣 32，外心改重心。但比較簡單了。

$$\text{易知 } \Delta PAB = \Delta PBC = \Delta PCA \Rightarrow z \cdot \overline{AB} = x \cdot \overline{BC} = y \cdot \overline{CA}$$

$$\text{又由正弦定理， } \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = \sin C : \sin A : \sin B$$

$$\text{故 } x : y : z = \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$$

12. [高二]有四奇與二奇二偶，故共有  $\frac{C_4^4 + C_2^4 C_2^3}{C_4^7} = \frac{19}{35}$ 。

13. [高一]直接通分就好，易得  $a=3$ 。

14. [國二]老梗，三大不可做的倍立方就是做不出三次方根。

15. [國三]也有點小抄再改數字。利用參數式。原式可化為  $9 + 7\sin^2 \theta \geq 9$ 。

16. [幾何]不會，死背。

17. [高一]定三角形內角分別為  $A, B, C$ ，且  $A + B + C = \pi$

$$\text{則 } \Delta = \frac{abc}{4R} = 2 \sin A \sin B \sin C，\text{易由算幾不等式得到 } \sin A \sin B \sin C \text{ 最大值，}$$

$$\text{發生在 } \sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{選 } \textcircled{1}$$

18. [高二]由不變值  $(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$ ，得知圖形為橢圓。

19. [國三]由直角三角形內心性質，可設三邊為  $1+x, 1+y, x+y, (x < y)$

$$\text{故有 } (1+x)^2 + (1+y)^2 = (x+y)^2 \Rightarrow xy = x + y + 1 = \Delta，\text{要有最小值}$$

$$\text{一樣發生在 } x = y \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \text{所求} = 3 + 2\sqrt{2}$$

20. [高二]三向量分別為  $(1, -1, -1), (-2, -4, 2), (-3, 4, 6)$ ，算此三向量的行列式值即可。

21. [微積分]設此圓柱高為  $h$ ，半徑為  $r$ 。則  $\frac{h}{1} + \frac{r}{3} = 1 \Rightarrow h = 1 - \frac{r}{3}$ ，

所求體積為  $\pi r^2(1 - \frac{1}{3}r)$ ，用微分可得最大值發生在  $r = 2, V = \frac{4}{3}\pi$

22. [微積分]可設曲面上的點  $(a, b, c)$  為距離原點最近的點，

構造輔助函數  $F(a, b, c) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + k(a - b)^2 - c^2 - 1$

$$\text{分別作偏微。則} \begin{cases} F_a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + 2k(a - b) = 0 \\ F_b = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - 2k(a - b) = 0 \\ F_c = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

則距離為  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

23. [國二]平面上兩直線不平行即相交。

24. [微積分]畫圖出來看就知道③④都對。

25. [高微]不會，死背。

26. [微積分]令  $f'(x) = 12x^2(x - 1) = 0, x = 0, 1$ ， $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 16$

27. [微積分-反函數]  $f(1) = 4, g(4) = 1, f'(1) = 4 + 2 = 6, g'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$

28. [高二]  $\begin{cases} g(1) = a + b = f(1) = -16 \\ g(-2) = -2a + b = f(-2) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -8 \end{cases} \Rightarrow g(-1) = 0$

29. [微積分]  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$  在  $x = 0$  不連續

30. [微積分]②少印了一個  $n$ ，所以多這個答案；④會絕對收斂。

31. [微積分]很基本的不定值。

32. [微積分]④會收斂到  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

33. [微積分]  $R = 1$ ，而  $x = 1$  收斂， $x = -1$  亦收斂，所以選  $[-1, 1]$

34. [微積分]每次跳  $x^2$  而已，係數是  $\sin$  的係數，所以選  $\sin x^2$ 。

35. [微積分]還是分項對消，原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}) = \frac{1}{2}$

36. [微積分]  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(\sqrt{2})^n}{1}} = \sqrt{2}$

37. [線代]只有①是伸縮變換。

38. [線代]同上題①，所以經過④的變換，直線還是直線。

39. [線代] 為了方便起見，取 $[e \ f]$ 為二階單位矩陣  $I_2$  即 $[e \ f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

由題目可知 $TI = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = T$ ，解出  $T$  的特徵值為 3 跟 2

對應到 3 的特徵向量為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 當然也可以說他是 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，

也就是 $f - e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

40. [微積分]有理化分子，原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$

41. [微積分]原理同上，值為 $\frac{1}{\sqrt{3}}$

42. [微積分]第二定理應用，原式 $= -\sqrt{\tan \frac{\pi}{4}} = -1$

43. [微積分]送分題，答案是②

44. [微積分]第二定理應用，答案是③

45. [微積分—變數變換]令 $x = \tan \theta, dx = \sec^2 \theta d\theta$ ，原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{8}$

46. [線代]只能慢慢算，答案是③跟④

47. [線代]鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ ，符合的是②

48. [線代]肉眼可看出，①3②2③1④1

49. [線代]用反證法，假設 $\det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0$ ，則 $A^{-1}$ 存在

因為 $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = 0 = B$ (矛盾)，所以 $\det(A) = 0$ ，同理可證 $\det(B) = 0$

50. [線代]旋轉

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{旋轉} A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \text{鏡射} B = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \\ AB = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(A) = 1 \\ \det(B) = -1 \\ \det(AB) = -1 \\ \det(BA) = -1 \end{array} \right.$$