

臺北市立第一女子高級中學 101 學年度第二次教師甄選數學科試題卷

一、 填充題(每格 10 分)

1. 設空間中一直線 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z-4}{3}$ ，其中 k 為實數。考慮在所有可能的 k 值之下，

點 $P(1,0,3)$ 到直線 L 距離的最小值為_____。答： $\frac{\sqrt{10}}{10}$

2. 設複數 $z = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$ ， \bar{z} 為 z 的共軛複數。若定義函數 $f(x) = \frac{\sum_{k=1}^{100} x^k + 1 + z}{x^{101}} = \frac{x^{100} + x^{99} + \cdots + x + 1 + z}{x^{101}}$ ，

則 $f(1+\bar{z})$ 為_____。答： $\cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$

3. 設 n 為自然數， $S_n = 3+5+7+\cdots+(2n+1)$ ，則 $f(n) = \frac{S_n}{(n+25)S_{n+2}}$ 的最大值為_____。 答： $\frac{1}{49}$

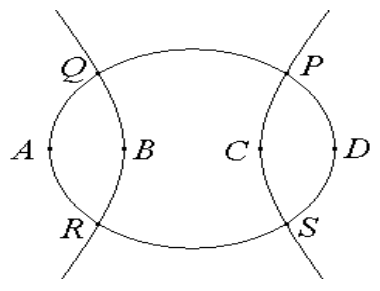
4. 已知 O 為原點， A, B 為 x 軸上相異二點且 $\overline{OA} = \overline{OB}$ ，平面上有一點 P 使得 ΔPAB 面積為 1，且 $\tan(\angle PAB) = \frac{1}{2}$ ， $\tan(\angle PBA) = -2$ ，則以 A, B 為焦點且過 P 的橢圓方程式為_____。

答： $\frac{4}{15}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$

5. 已知 $f(x) = x^4 + ax^2 + x + 1$ 於區間 $[0, \infty)$ 為遞增函數，則實數 a 的範圍為_____。

答： $a \geq -\frac{3}{2}$

6. 如圖，一橢圓與一雙曲線交於 P, Q, R, S 四點，其中點 A, D 為橢圓的長軸頂點亦為雙曲線的焦點；點 B, C 為雙曲線的貫軸頂點亦為橢圓的焦點。



若 P, Q, R, S 可作為正方形的四個頂點，則 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$ 之值為_____。

答： $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

7. 圓 $C: x^2 + y^2 - 24x - 28y - 36 = 0$ 內有一點 $Q(4,2)$ ，過 Q 做直角三角形 AQB 交圓於 A, B 兩點，且 $\angle AQB = 90^\circ$ ，若 \overline{AB} 的中點為 P ，則 P 的軌跡方程式為_____。

答： $x^2 + y^2 - 16x - 16y - 8 = 0$

8. 小綠參加大學指定科目考試時，題目卷中有關多選題得分敘述如下---「多選題的每題有四個選項，其中至少有一個是正確的選項。請選出正確的選項，畫記在答案卡之解答欄。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 8 分，答錯一個選項者得 4 分，所有選項均未作答或答錯多於一個選項者，該題以 0 分計算。」若小綠此題有作答，請你算算看她此題得分的期望值為_____。答： $\frac{22}{15}$