41.$\because x^2+2nx+(n-1)^2=0$的兩根爲整數，$\therefore x=\dfrac{-2n\pm\sqrt{4n^2-4(n-1)^2}}{2}=-n\pm\sqrt{2n-1}$

即 2n-1 爲完全平方數且爲奇數(2n-1<99)，2n-1=1,9,25,48,81→ n=1,5,13,25,41

所求爲 1+5+13+25+41=85

42.2012=$2^2\times503=2^2\times(2\times251+1)=\cdots=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^2$

43.(A)1^2+2^2 (C) 6^2+7^2 (D) 1^2+11^2

44.設首項爲 a，$S=\dfrac{100(2a+99)}{2}=50(2a+99)$，S 爲 50 倍數但不爲 4 的倍數(∵2a+99 爲奇數)

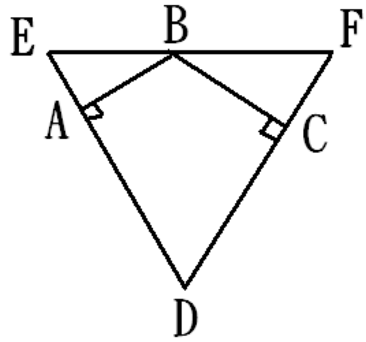
故選(C)

45.將 ABCD 補成正三角形，∵∠ABC=120°，

∠BAD=∠BCD=90° ∴△ABE 與△CBF 爲 90°-30°-60°之三角形

又 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$ $\therefore\overline{BE}=\dfrac{6}{\sqrt3}$，$\overline{BF}=\dfrac{8}{\sqrt3}$，$\overline{CF}=\dfrac{4}{\sqrt3}$

所求 $\overline{CD}=\overline{FD}-\overline{FC}=\overline{EF}-\overline{FC}=\dfrac{6}{\sqrt3}+\dfrac{8}{\sqrt3}-\dfrac{4}{\sqrt3}=\dfrac{10}{\sqrt3}$



46.將點坐標化，令 A(0,0)，B(a,0)，G(0,$\sqrt{ab}$)，H($\sqrt{ab}$,b)

直線 GB 方程式：$\sqrt{ab}x+ay-a\sqrt{ab}=0$

A、H 在異側 $(\sqrt{ab}\cdot0+a\cdot0-a\sqrt{ab})(\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}+a\cdot b-a\sqrt{ab})<0$ 且 a>b>0

→ $-a\sqrt{ab}(ab+ab-a\sqrt{ab})<0$

→ $2ab-a\sqrt{ab}>0$

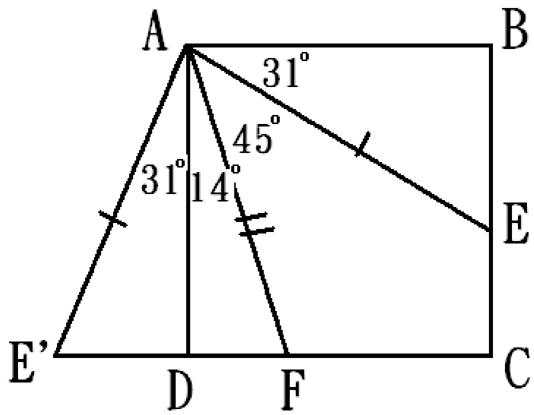
→ $2b-\sqrt{ab}>0$

→ $4b^2>ab$

∴4b>a

47.以 A 爲圓心，逆時針旋轉△ABE，

使 $\overline{AB}$ 重疊 $\overline{AD}$，則 $\Delta AE'F\cong\Delta AEF$ (SAS 全等)



所求∠AFE=∠AFE’=∠AFD=$90°-14°=76°$

48.$P=\dfrac{C_4^9-8\cdot C_1^6}{C_4^9}=\dfrac{13}{21}$(三點共線[直、橫、列、斜]→8；與另一點形成三角形 C_1^6)

49.α是 $x^2-2012x+1=0$ 之一實根，則 $\alpha^2-2012\alpha+1=0$

$$\therefore\alpha^2-2011\alpha+\frac{2012}{\alpha^2+1}=(\alpha^2-2012\alpha)+\alpha+\frac{2012}{2012\alpha}=-1+\alpha++\frac{1}{\alpha}=\frac{-\alpha+\alpha^2+1}{\alpha}$$

$$=\frac{-\alpha+2012\alpha}{\alpha}=2011$$

50. $\sqrt{2x^2-6x+15}+\sqrt{2x^2-10x+15}=2x$ ，令$a=2x^2-6x+15$

$\sqrt{a}+\sqrt{a+4x}=2x\Rightarrow\sqrt{a+4x}=2x-\sqrt{a}$ 平方$\Rightarrow a+4x=4x^2+a-4x\sqrt{a}$

消掉 a、同除 4x $\Rightarrow 1=x-\sqrt{a}\Rightarrow\sqrt{a}=x-1$ 平方$\Rightarrow a=(x-1)^2$

即$2x^2-6x+15=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-4x+14=0$

所求兩根之積$\alpha\beta=14$

51. $\frac{8(1+8)}{2}=36$ ，$\left[\frac{403-36}{9}\right]=40$ ，$403-40\times9=43$ ，$43-36=7$

(0,1,2,3)(4,5,6,,7,8)當每位同學柳丁數差一

(0,0,1,1)(1,1,1,1,1)多出來七顆的分配

所求$40\times4+1+2+3+2=168$

52. $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=518+468+650=2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=818$

$$\begin{cases}ab=818-650=168\\ bc=818-518=300\\ ca=818-468=350\end{cases}\Rightarrow(abc)^2=168\times300\times350$$

所求$abc=4200$

53.利用正弦定理$a\csc A=b\csc B=c\csc C=2R$ 且$\csc A=2$ ，$\csc B=3$

$\therefore 2a=3b=2R$ ，$a=R$ ，$b=\frac{2}{3}R$

$$\sin C=\sin(180^\circ-(A+B))=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

$\because\sin C=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}>\sin A=\frac{1}{2}>\sin B=\frac{1}{3}$ $\therefore c>a>b$

所求$b=\frac{2}{3}R=\frac{2}{3}\cdot\frac{c}{2\sin C}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}}=\frac{2}{3}\cdot9=6$

54.PQ 弧=$\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot9=9\pi$ ，小圓周長=$2\pi\cdot2=4\pi$ →共轉$2\frac{1}{4}$圈

小圓箭頭對面的點與 Q 重疊，故箭頭指向西方

55.設$\overline{BC}=x$ ，$\overline{OC}=\sqrt{x^2+14x+625}$

ΔOAB ：$\Delta OBC=\overline{AB}$ ：$\overline{BC}\Rightarrow\frac{1}{2}\times7\times24$ ：$\frac{1}{2}\times8(\sqrt{x^2+14x+625}+x+25)=7$ ：x

$\therefore x=38$ ，$r=\frac{24\times45}{51+24+45}=9$

56. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 f(x)-9f(3)}{x-3} \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 3} 2x\cdot f(x)+x^2 f'(x)=6\cdot f(3)+9f'(3)=30+36=66$

57. $\dfrac{X}{Y}+\dfrac{4X+5Y}{4Y+5X}=\dfrac{X}{Y}+\dfrac{\frac{4X}{Y}+5}{4+\frac{5X}{Y}}=2$，令 $\dfrac{X}{Y}$=A 即求 $A+\dfrac{4A+5}{4+5A}=2$ 兩邊同乘 $4+5A$

$4A+5A^2+4A+5=8+10A$，$5A^2-2A-3=0$，$(5A+3)(A-1)=0$，$A=-\dfrac{3}{5} or\ 1$

因為 X、Y 為相異實數，故 $A=-\dfrac{3}{5}=-0.6$

58.坐標化 A(0，0)、B(0，-2)、C(3，-2)、D(3，-6)、E(21，-6)

利用重心坐標公式

$G_1=(\dfrac{0+0+3}{3},\dfrac{0-2-2}{3})=(1,-\dfrac{4}{3})$ 、 $G_2=(\dfrac{0+3+3}{3},\dfrac{-2-2-6}{3})=(2,-\dfrac{10}{3})$ 、

$G_3=(\dfrac{3+3+21}{3},\dfrac{-2-6-6}{3})=(9,-\dfrac{14}{3})$

$\Delta G_1G_2G_3=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 9 & 1 \\ -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{10}{3} & -\dfrac{14}{3} & -\dfrac{4}{3}\end{matrix}\right|=\dfrac{19}{3}$

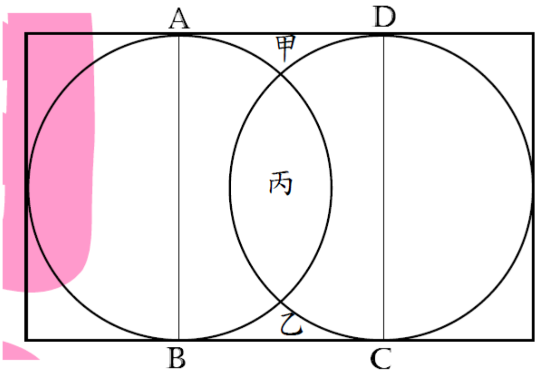
59.坐標化設 A(-1，2)，B(-3，1)，C(-2，-1) 過 $x=ay^2+by+c$

$x=\dfrac{5}{6}y^2-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{10}{3}=\dfrac{5}{6}(y-\dfrac{3}{10})^2-\dfrac{409}{120}$

60. $\left|(6\cdot 6\cdot 10-\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot 6)-\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot 6\right|=180$

61.如下圖，∵甲+乙=丙 ∴矩形 $ABCD$ =一個圓面積

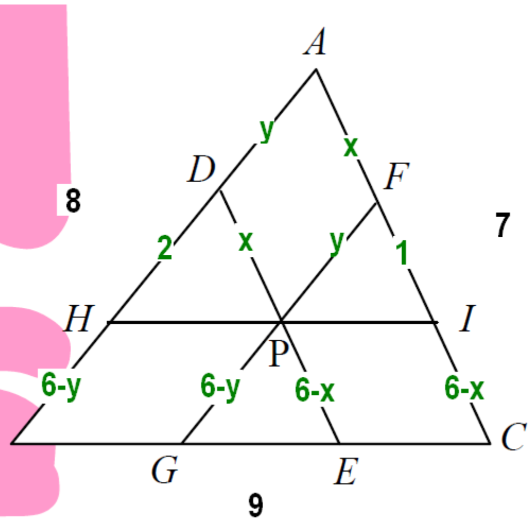
$2r\cdot$連心線長$=\pi\cdot r^2$ → 連心線長$=\pi\cdot\dfrac{r}{2}=\dfrac{5}{2}\pi$



62.第 99 列第一個數字 $\dfrac{99(1+99)}{2}=4950$

所求=4950− 43=4907

63.$\because \overline{DE} // \overline{AC}$ ，$\overline{GF} // \overline{AB}$ ，$\overline{HI} // \overline{BC}$



知 $\overline{FI}=1$ ，$\overline{HD}=2$

$\Delta ABC \sim \Delta DHP \sim \Delta FPI \sim \Delta PGE$

所以 $\overline{HI}=\overline{HP}+\overline{PI}=\frac{9}{4}+\frac{9}{7}=\frac{99}{28}$

(2：$\overline{HP}$=8：9 ；$\overline{PI}$ ：1=9：7)

64. $689^{689}=(690-1)^{689}\equiv C_1^{689}\cdot 690\cdot(-1)^{688}+C_0^{689}(-1)^{689}$ =689×690− 1=675409

65.四$\xrightarrow{3}$三；六$\xrightarrow{5}$五；八$\xrightarrow{4}$一；七$\xrightarrow{1}$六；八$\xrightarrow{2}$七

3+5+4+1+2=15

66. $O_1PBQ = AO_1O_2B-\Delta AO_1Q-\Delta BPO_2=\frac{4\sqrt{3}(3+4)}{2}-\frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2}-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{45}{7}\sqrt{3}$

($\overline{AQ}=\overline{BQ}=\overline{PQ}$ ，$\overline{AB}=4\sqrt{3}$ ，$\sin\angle BO_2P=\sin\angle BO_2O_1=\frac{4\sqrt{3}}{7}$)

67.令 $\overline{AQ}=x$ ，$\because$D 為 BC 弧中點 $\therefore \angle BAD=\angle DAC$

則 $\overline{AB}$ ：$\overline{AC}=\overline{BQ}$ ：$\overline{QC}$ ，$\overline{BQ}$=5、$\overline{QC}$=4

由餘弦定理 $\frac{10^2+x^2-5^2}{2\cdot 10\cdot x}=\frac{8^2+x^2-4^2}{2\cdot 8\cdot x}$ ，$x=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

68.C(0，6)、A(− 12，0)、B(0，12)

$\because \Delta BCP$ ：$\Delta BOA=1$：6 $\therefore \overline{BP}$ ：$\overline{AP}=\Delta OBP$ ：ΔOPA=(1+1)：6− 1− 1)=1：2

$P=(\frac{-12\cdot 1+0\cdot 2}{3},\frac{0\cdot 1+2\cdot 12}{3})=(-4,8)$

$m_{pc}=\frac{6-8}{0-(-4)}=\frac{-1}{2}$

69. $N=1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times 49=5^3(3\times 7\times 9\times 11\times 13\times 15\times 17\times 19\times 21\times 23\times 27\times\cdots\times 49)$

$=5^3[3\times 7\times 27\times 29\times 31\times 49\times(9\times 11\times 13\times 15)(17\times 19\times 21\times 23)\cdots]=5^3(8k+5)$

$=1000k+625$

70.邊長比=1：3 $\therefore (\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$