

# 臺北市立中正高級中學102學年度第1次專任教師甄選

## 數學科初選試卷

第一頁/共二頁

### 一、填充題：

1. 求方程式  $6x^6 + 5x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 11x^2 - x - 6 = 0$  之所有有理根之和為  $-\frac{5}{6}$ 。
2. 擲一公正骰子  $n$  次，出現的最大點數為  $M$ ，最小點數為  $m$ ，滿足  $M - m < 5$  的機率為  $P_n$ ，求  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 8$ 。
3. 恰有3個數字相同的四位數共有 324 個。
4. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P = A - I$  且  $P^2 = P$ ，  
(1) 求  $a$ 、 $b$  的關係式  $a^2 - 3a - 3b + 2 = 0$ 。  
(2)  $A^{-1} = sP + tI$ ， $s, t \in R$ ，則數對  $(s, t) = (-\frac{1}{2}, 1)$ 。
5. 等差數列  $\langle a_n \rangle$ ，前  $n$  項和為  $S_n$ ，若  $S_{2013} = 3102$ ， $S_{3102} = 1302$ ，則  $S_{5115} = \frac{-93000}{11}$ 。
6. 設一球面的半徑為2，球心在直線  $L: x = \frac{y}{2} = z + 1$  上，此球面與  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $zx$  平面所交成的圓面積和為  $S$ ，求  $S$  的最大值為  $\frac{67}{6}\pi$ ，此時球面的球心坐標為  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6})$ 。
7. 設有  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個硬幣，出現正面的機率依次為50%、30%、60%。今任選一枚硬幣投擲，若出現正面，則用原硬幣再投擲第二次；若第一次投擲反面，則由其餘兩枚中再任選一枚投擲第二次  
(1) 求兩次均為正面的機率  $\frac{7}{30}$ 。  
(2) 若已知兩次均投擲同一枚的條件下，求這枚為  $C$  硬幣的機率為  $\frac{3}{7}$ 。
8. 已知有5個正整數，其算術平均數為12，全距為18，中位數與眾數均為8，試問第二大的數之可能值有 6 個。
9. 首先觀察有限小數37.108在小數點前後共寫了5個阿拉伯數字，現在若把  $\frac{3^{100}}{2^{50}}$  寫成小數型式，則整個數值在小數點前後共需寫出 83 個阿拉伯數字。

臺北市立中正高級中學102學年度第1 次專任教師甄選

數學科初選試卷

第二頁/共二頁

二、 計算證明題：自行標號且須有過程，否則不予計分。

1. 已知  $x, y, z$  均為實數且  $x + y + z = 1$ ，求證  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

耀昇提出下列解法：

設  $x = \frac{1}{3} - t, y = \frac{1}{3} - 2t, z = \frac{1}{3} + 3t$ ，則  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} + 14t^2 \geq \frac{1}{3}$  得證

但此種解法是錯誤，請指出錯誤之處並寫出您的證法。

2. 若  $f(x) = x^2 - x + b$ ，且  $f(\log_2 a) = b$ ， $\log_2 f(a) = 2(a > 0, a \neq 1)$ 。

(1)  $f(\log_2 x)$  的最小值及相應的  $x$  值。

(2) 若  $f(\log_2 x) > f(1)$  且  $\log_2 f(x) < f(1)$ ，求  $x$  的範圍。

3. 設  $a + b + c = 3$ ， $a^2 + b^2 + c^2 = 45$

(1) 求  $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = ?$

(2) 求  $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = ?$

4. (1) 設  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ； $b_1, b_2, \dots, b_n$  均為正數，

求證： $\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \times \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}$

(2) 設  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，求  $\frac{1}{\cos^3 \theta} + \frac{32}{\sin^3 \theta}$  之最小值