

數學試題

※請於答案卷作答

一、填充題（75%，每格 5%）

1、設 a, b 為自然數，且 a 公分和 b 公分分別為長方形的長和寬，若長方形周長的數值和面積的數值相等，則 (a, b) 的所有情形是（ ）。

2、設 α, β 為 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 之二根，則以 $|\alpha|, |\beta|$ 為二根之一元二次方程式（領導係數為 1）是（ ）。

3、將無限小數 $12.\overline{3456}$ 化成分數，其結果為（ ）。

4、設 $f\left(\frac{x-2}{2x+1}\right) = 5x-3$ ，則 $f(-1) =$ （ ）。

5、丟一個公正的骰子，若出現點數 k ，可以得到 k^2 元，則丟骰子一次可得到金額的期望值為（ ）元。

6、分母是 2013 的最簡真分數有 () 個。

7、 $1^2 + 11^{12} + 21^{22} + 31^{32} + 41^{42} + \cdots + 2011^{2012}$ 之個位數字為 ()。

8、 $2^3 + 12^{13} + 22^{23} + 32^{33} + 42^{43} + \cdots + 2012^{2013}$ 之個位數字為 ()。

9、空間中兩球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 與 $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 9$ 被 $x = 0$ 之平面截出兩圓 O_1 與 O_2 ，則 O_1 與 O_2 之外公切線長為 ()。

10、有三個正質數由小到大排列分別為 x, y, z ，若 $x + y + z = 227$ 且 xyz 之值為最大，則 $(x, y, z) = ()$ 。

11、若定義 $a \otimes b = a^2 - b^2$ ，則 $(2011 \otimes 2012) \otimes (2012 \otimes 2013) = ()$ 。

12、有一自然數 n ，其個位數字為 6，將個位數字移到此自然數 n 之首位，所得的數為原數的 4 倍，則自然數 n 最小為 ()。

13、試求 $9 \times 99 \times 999 \times \dots \times \underbrace{999 \dots 9}_{999 \text{個} 9}$ 之乘積除以 1000 的餘數為 ()。

14、 $(50 + 49x + 48x^2 + \dots + 3x^{47} + 2x^{48} + x^{49})(50x^{49} + 49x^{48} + 48x^{47} + \dots + 3x^2 + 2x + 1)$ 乘開後， x^{49} 項之係數為 ()。

15、解聯立方程組
$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 4x - 2y - 3z = 0 \\ x^2 = 2y + z \end{cases}$$
，則 $(x, y, z) = (\quad)$ 。

二、計算證明題（25%，請務必寫出計算過程和結果）

1、試證明 $\sqrt{2}$ 為無理數。（8%）

2、如下圖所示，甲、乙兩人分別從 A、B 兩地相向等速率而行，兩人第一次相遇在距離 A 地 1000 公尺的地方，兩人相遇後繼續前進，並分別於 B、A 兩地折返，隨後第二次相遇於距離 A 地 500 公尺的地方，試求 A、B 兩地的距離。
（8%）



3、正三角形 ABC 內部一點 P ，滿足 $\overline{PA}=3, \overline{PB}=4, \overline{PC}=5$ ，試求 ABC 的面積。（9%）