用向量來看平面族定理

◎蘇俊鴻／北一女中

前言

在空間中的平面與直線的章節中，我們經常使用「平面族定理」來解題，這個定理在現行課程大綱的安排上並未納入。因此，許多人對它只是知其然，而不知其所以然。事實上，透過向量觀點的切入，可以為我們提供理解的途徑。本文的目的，就是由此出發，想把它說個清楚。最後，也提供一些可用「平面族定理」處理的例子。

「平面族定理」的由來

在空間中的平面與直線的章節裡，常會遇到這樣的問題：

求過二平面 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$ 的交線，且過點 $Q(2,-1,-1)$ 的平面方程式。

如何解決這類問題呢？基本上有二種處理方式：

(一)先找到兩個平面交線的方向向量及交線上的一點坐標，就回歸到「求包含已知一線及線外一點的平面方程式」的問題類型。

解法如下：

$\because$ 兩平面交線 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}$ 同時垂直兩平面的法向量，故 $\overrightarrow{v} \,/\!/\, (2,1,0)\times(0,1,2)=(2,-4,2)=2(1,-2,1)$，可取 $\overrightarrow{v}=(1,-2,1)$，接著在交線 L 取一點 P，因為須同時滿足 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$，故取 $z=0, y=0, x=2$，$\therefore P(2,0,0)$，所求平面包含直線 L 與點 $Q(2,-1,-1)$，因此法向量 $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{PQ}=(1,-2,1)\times(0,1,1)=(-3,-1,1)$，取 $\overrightarrow{n}=(3,1,-1)$ 所求平面方程式為 $3x+y-z-6=0$.

此法計算過程較為繁複，因此老師們多半會再介紹另一種作法：

(二)透過「平面族定理」，將過已知兩平面交線的任一平面，表示成這兩個平面的線性組合，再進行處理。

設所求的平面為 $(2x+y-4)+k(y+2z)=0$,

$\because$ 過點 $(2,-1,-1)$

$\therefore$ 代入上式，得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

所求平面方程式為

$$(2x+y-4)+\left(-\frac{1}{3}\right)(y+2z)=0,$$

即

$$3x+y-z-6=0.$$

這個方法雖然快速，卻有著許多環節必須詳加說明，像是

什麼是平面族？

為什麼過已知兩平面交線的任何平面，一定可以表示成這兩個平面的線性組合呢？

這些問題都需要解釋清楚，第一個問題只是定義的問題，倒是容易交代。我們是這麼定義

「平面族」的：通過一條直線之所有平面所成的集合叫做平面族。而第二個問題則是困惑著許多人：利用「線性組合」來建構一個新的平面的概念，是由何而來呢？總不會憑空冒出的吧？課本早將這個主題略而不提，而能查到的資料通常都是「事後諸葛亮」的作法，只告訴我們兩件事：

⑴利用兩平面方程式的線性組合所作出的方程式仍是個平面。

⑵它也會包含這已知兩平面的交線。

在這篇文章中，筆者試圖對這件事做個說明，而非只是給個「事後諸葛亮」的證明。

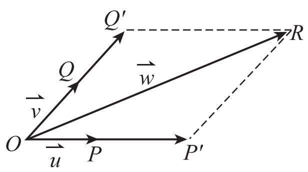
事實上，利用第三冊數學課本所學的知識就足夠我們將這個概念引發出來，我們需要用什麼觀念呢？先來複習一下。

㈠向量的線性組合

所謂的向量，就是同時具有大小及方向的量。在平面上，若我們給定兩個不平行的向量 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$，透過向量係數積及加法的性質，我們極易證出下列的性質：

在 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 所決定的平面上，任一個向量 $\overrightarrow{w}$ 均可寫成 $r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$ ，其中 $r, s\in R$，而 $r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$ 的形式就稱為 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 的線性組合。

【證明】如圖 1 所示，



▲圖 1

我們不妨設 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v}=\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{w}=\overrightarrow{OR}$，由於 O、P、Q、 R 四點在同一平面上，因此，我們可以過 R 作一直線與直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 平行，交直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 於 Q'；作一直線與直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 平行，交直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 於 P'。由於 P' 在直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 上，所以 $\overrightarrow{OP'}=r\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{u}$。同理，$\overrightarrow{OQ'}=s\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{v}$ 。

由向量的加法，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}\Rightarrow\overrightarrow{w}=r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$。同時，對每一個向量 $\overrightarrow{w}=r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$ ，只要 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 不平行，則 r 與 s 是唯一決定的。也就是說，設 $\overrightarrow{w}=r_1\overrightarrow{u}+s_1\overrightarrow{v}=r_2\overrightarrow{u}+s_2\overrightarrow{v}$ ，得 $(r_1-r_2)\overrightarrow{u}=-(s_1-s_2)\overrightarrow{v}$，若 $r_1-r_2\neq 0$，則 $\overrightarrow{u}=-\dfrac{s_1-s_2}{r_1-r_2}\overrightarrow{v}$，所以 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$，這與假設 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 不平行矛盾。因此 $r_1=r_2\Rightarrow s_1=s_2$ 。

利用兩個不平行向量的線性組合，可以表示同一平面上的任意向量，這個性質對於我們理解本文的主題是個很重要的切入點。

㈡平面方程式

想要描述空間中的平面方程式，向量的觀念更是不可或缺，我們正是利用與平面垂直的向量（稱為法向量 $\overrightarrow{n}$ ）來決定平面的方向性，而每一個平面方程式也決定了它的法向量：

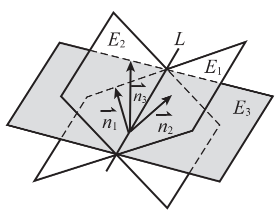
⑴通過點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 而與非零向量 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ 垂直的平面方程式為

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

⑵空間中每一個平面的方程式都具有 $ax+by+cz+d=0$ 的形式，其中 a, b, c 不全為 0，且 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ 為這個平面的法向量。

好了，該是將平面族的觀念引出的時候。讓我們回到最開始的情況吧！

如圖 2，



▲圖 2

已知平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 與 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 相交於 L ，則 $\overrightarrow{n_1}=$

(a_1, b_1, c_1)，$\overrightarrow{n_2}=(a_2, b_2, c_2)$ 為平面 E_1 與 E_2 的法向量。設過交線 L 的任一平面為 E_3，且 $\overrightarrow{n_3}$ 為平面 E_3 的法向量。由於 $\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$ 和 $\overrightarrow{n_3}$ 均垂直於直線 L，所以三個向量共平面。（不妨想像三個向量可自由移動，從 L 上同一點出發）由向量的線性組合可知

$$\overrightarrow{n_3}=\alpha\overrightarrow{n_1}+\beta\overrightarrow{n_2}=\alpha(a_1, b_1, c_1)+\beta(a_2, b_2, c_2)$$
$$=(\alpha a_1+\beta a_2, \alpha b_1+\beta b_2, \alpha c_1+\beta c_2).$$

設 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為 L 上的一點。因此，平面 E_3 的方程式可以寫成

$$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)z$$
$$=(\alpha a_1+\beta a_2)x_0+(\alpha b_1+\beta b_2)y_0+(\alpha c_1+\beta c_2)z_0,$$

以 α, β 為準，整理得

$$\alpha[(a_1x+b_1y+c_1z)-(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0)]$$
$$+\beta[(a_2x+b_2y+c_2z)-(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0)]=0,$$

又 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為 L 上的一點，當然也滿足平面 E_1 與 E_2 的方程式，所以

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1=0,$$
$$a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2=0.$$

代入上式，即得

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

因此，「過兩已知平面交線的任意平面可以寫成這兩個平面的線性組合。」這個推論看來就自然而然了。不過，如何保證這個推論會成立呢？這得需要好好證明一下，以下就是這個定理的證明。

「平面族」定理的證明

【定理】假設給定兩個平面方程式

$$\begin{cases}E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases},$$

則通過這兩個平面的交線 L 的平面族方程式必可寫成以下的形式：

$$\alpha E_1+\beta E_2=0\ (\alpha^2+\beta^2\neq 0),$$

亦即，

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$$
$$(\alpha^2+\beta^2\neq 0)\cdots(*)$$

【證明】整個定理的證明可分為三部分：

(1)上面的方程式(*)一定是表示平面方程式；

(2)方程式(*)一定會通過 E_1 與 E_2 的交線 L；

(3)證明任何通過 L 的平面均可寫成方程式(*)的形式。

(1)方程式(*)一定是表示平面方程式

當 $\alpha=0$，$\beta\neq 0$ 時，方程式(*)為平面 E_2。

當 $\alpha\neq 0$，$\beta=0$ 時，方程式(*)為平面 E_1。

當 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ 時，方程式(*)可寫成一般式：$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)z+(\alpha d_1+\beta d_2)=0$，此方程式的 x、y、z 係數不全為零。(Why？)

Ans：若方程式的 x、y、z 係數全為零，則 $\alpha a_1+\beta a_2=\alpha b_1+\beta b_2=\alpha c_1+\beta c_2=\alpha d_1+\beta d_2=0$

$\Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，即平面 E_1 與 E_2 平行。（與已知矛盾）

可見方程式(*)是 x、y、z 的一次方程式，所以它表示平面方程式。

(2)方程式(*)所表示的平面一定會通過 E_1 與 E_2 的交線 L

這顯然是成立的！因為直線 L 是平面 E_1 與 E_2 的交線，則 L 上的任一點〔設為 $P(x_0, y_0, z_0)$〕均會滿足平面 E_1 與 E_2 的方程式。所以

$a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1=0$ 且 $a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2=0$

$\Rightarrow \alpha(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)+\beta(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)=0$ 滿足方程式(*)。

因此，方程式(*)所表示的平面都通過直線 L。

(3)任何通過 L 的平面均可寫成方程式(*)的形式

也就是任何過 L 的平面，必有不全為零的 α 與 β，可寫成方程式(*).

當平面 E 是平面 E_1 時，取 $\alpha=1,\beta=0$ 就可以了。

當平面 E 是平面 E_2 時，取 $\alpha=0,\beta=1$ 就可以了。

當平面 E 不為 E_1 與 E_2 時，取平面 E 上，不在 L 的一點 $Q(x_0,y_0,z_0)$，由於 Q 不在 E_1 與 E_2 上（∵ Q 不在 L 上），所以 $a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1\neq 0$ 且 $a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2\neq 0$.

我們取

$$\alpha=a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2,$$
$$\beta=-(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1),$$

則滿足

$$(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)+[-(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)](a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)=0$$

也就是

$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$, $(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$的形式。

所以過交線 L 的平面均可寫成方程式(*)。

綜合上述(1)、(2)、(3)可知，方程式(*)表通過平面 E_1 與 E_2 之交線的平面族方程式。

在上述證明中，各位也看到：對於不是 E_1 與 E_2 的平面，則均為 $\alpha\neq 0$ 與 $\beta\neq 0$ 的情形。所以我們可以將方程式(*)調整成

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\frac{\beta}{\alpha}(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0\cdots(**),$$

如果令 $k=\dfrac{\beta}{\alpha}$，則方程式變成

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0\cdots(***),$$

所以當我們所求平面不為 E_1 與 E_2 的平面時，可以直接將平面族方程式令為方程式(***)。

同樣的道理，我們也可用向量來表示平面上的直線方程式，$ax+by+c=0 \Leftrightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b)$，因此由上面的討論，我們不難類推「直線系」概念的由來，此處就不再多談。

【定理】假設給定兩個直線方程式

$$\begin{aligned}L_1&: a_1x+b_1y+c_1=0\\ L_2&: a_2x+b_2y+c_2=0\end{aligned},$$

則通過這二個直線交點 P 的直線系方程式必可寫成以下的形式：$\alpha L_1+\beta L_2=0\ (\alpha^2+\beta^2\neq 0)$，亦即，

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0$$
$$(\alpha^2+\beta^2=1)\cdots(*).$$

接著我們來看些可用「平面族定理」解決的問題吧！例題一是個常見的例子。

【例題一】求過二平面 $3x+y-z+1=0$、$x+y+z=0$ 的交線，且與平面 $2x-y+3z-1=0$ 垂直的平面方程式。

【解法一】設已知二平面 $3x+y-z+1=0$、$x+y+z=0$ 的交線 L，則 L 的方向向量

$$\overrightarrow{v}\ //(3,1,-1)\times(1,1,1)=2(1,-2,1),$$

故取方向向量 $\overrightarrow{v}=(1,-2,1)$。且由聯立方程組

$$\begin{cases}3x+y-z+1=0 & \cdots ①\\ x+y+z=0 & \cdots ②\end{cases}$$

① + ② $\Rightarrow 4x+2y+1=0$,

可取 $x=0, y=-\dfrac{1}{2}$，則 $z=\dfrac{1}{2}$.

故點 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 在 L 上。依題意，所求平面包含 L，且垂直平面 $2x-y+3z-1=0$, 則其法向量 $\overrightarrow{n}\perp(1,-2,1)$, $\overrightarrow{n}\perp(2,-1,3)$, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\ //(1,-2,1)\times(2,-1,3)&=(-5,-1,3)\\&=-(5,1,-3),\end{aligned}$$

取 $\overrightarrow{n}=(5,1,-3)$.

又點 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 也在平面上，因此，所求平面為

$$5x + y - 3z + 2 = 0.$$

【解法二】根據平面族定理，設所求的平面方程式為

$$(3x + y - z + 1) + k(x + y + z) = 0$$
$$\Rightarrow (3 + k)x + (1 + k)y + (-1 + k)z + 1 = 0,$$

則此平面的法向量為 $(3 + k, 1 + k, -1 + k)$,

依題意，由向量的內積

$$2(3 + k) + (-1)(1 + k) + 3(-1 + k) = 0$$
$$\Rightarrow 4k + 2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 所求的平面方程式為 $5x + y - 3z + 2 = 0$.

事實上，由於空間中的直線方程式可表示成兩面式，讓我們常在求與直線條件有關的平面方程式問題上，應用平面族的概念。看看下面的例子：

【例題二】試求包含 x 軸，且過點 $A(1, -1, 2)$ 的平面方程式。

【解法一】先在 x 軸上取一點 $B(1, 0, 0)$，且 x 軸的方向向量為 $\vec{v} = (1, 0, 0)$，由於所求平面包含 x 軸，並過 $A(1, -1, 2)$，所以其平面的法向量 $\vec{n} \parallel \vec{v} \times \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \times (0, 1, -2) = (0, 2, 1)$。

故取 $\vec{n} = (0, 2, 1)$

$\therefore$ 平面方程式為 $2y + z = 0$.

【解法二】由於 x 軸的直線方程式可寫成 $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$（兩面式），根據平面族定理，包含 x 軸的任意平面可以寫成 $y + kz = 0$，將$(1, -1, 2)$代入，得 $k = \frac{1}{2}$，所以平面方程式為

$$y + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow 2y + z = 0.$$

【例題三】求直線 L ： $\begin{cases} x - y + z - 6 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ 在平面 E ： $x + y - z = 0$ 的正射影直線 L' 的方程式。

【解法一】由於兩點決定一直線，不妨找出 L 上的兩相異點，例如點 $A(2, -4, 0)$， $B(3, -2, 1)$ 在 L 上，再求其在平面 E 上的投影點，則投影點會落在 L' 上。

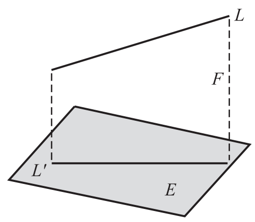
以求點 A 在平面 E 的投影點 A' 為例。由於直線 $\overleftrightarrow{AA'}$ 垂直平面 E，所以直線 $\overleftrightarrow{AA'}$ 的參數式為

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + t, t \in \boldsymbol{R}, \\ z = -t \end{cases}$$

因此可設點 $A'(2 + t, -4 + t, -t)$ ，又點 A' 在平面 E 上，故代入平面方程式，得 $t = \frac{2}{3}$ ，所以 $A'(\frac{8}{3}, \frac{-10}{3}, \frac{-2}{3})$。同理，可得點 B 在平面 E 的投影點 $B'(3, -2, 1) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ，可取直線的方向向量$(1, 4, 5)$, 故直線 L 在平面 E 的投影直線為

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 1}{5}.$$

【解法二】如圖 3，設 F 為包含直線 L 且與平面 E 垂直的平面。由於直線 L 在平面 E 上的投影直線 L' ，恰為平面 E 與平面 F 的交線。故求出平面 F 即可。



▲ 圖 3

由於平面 F 過直線 L ，根據平面族定理，可設

$$F ： (x - y + z - 6) + k(y - 2z + 4) = 0$$
$$\Rightarrow x + (-1 + k)y + (1 - 2k)z + (-6 + 4k) = 0,$$

故法向量為 $(1, -1 + k, 1 - 2k)$,

又平面 F 垂直平面 E，故

$$(1, -1 + k, 1 - 2k) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

因此，平面 F 的方程式為

$$(x-y+z-6)+\frac{1}{3}(y-2z+4)=0$$

$$\Rightarrow 3x-2y+z-14=0,$$

故投影直線 L' 的方程式為

$$\begin{cases}3x-2y+z-14=0\\ x+y-z=0\end{cases},$$

（這與解法一的答案是等價的！）.

【例題四】包含直線 L_1：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ 與直線 L_2：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{6}$ 的平面方程式。

【解法一】由題意可知 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$，點 $A(-1,3,2)$在 L_1 上；L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(2,4,6)$，點 $B(2,-1,3)$在 L_2 上。所以欲求之平面的法向量 $\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{AB}=(1,2,3)\times(3,-4,1)=(14,8,-10)=2(7,4,-5)$，故取 $\overrightarrow{n}=(7,4,-5)$, 故所求平面方程式為

$$7x+4y-5z+5=0.$$

【解法二】設所求之平面上有一點 $P(x,y,z)$，依題意可知 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$，點 $A(-1,3,2)$在 L_1 上；L_2的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(2,4,6)$，點 $B(2,-1,3)$在 L_2 上。則 $\overrightarrow{AB}=(3,-4,1)$，$\overrightarrow{v_1}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{AP}=(x+1,y-3,z-2)$ 共平面。故

$$\begin{vmatrix}x+1 & y-3 & z-2\\ 3 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -14(x+1)-8(y-3)+10(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 7x+4y-5z+5=0,$$

故所求平面方程式為 $7x+4y-5z+5=0$.

【解法三】我們可將 L_1 改寫成兩面式

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}\\ \dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y+5=0\\ 3y-2z-5=0\end{cases},$$

根據平面族定理，過 L_1 的平面方程式可設為

$$(2x-y+5)+k(3y-2z-5)=0,$$

又包含 L_2，故將點 $B(2,-1,3)$代入平面方程式，得 $k=\dfrac{5}{7}$。

故欲求平面方程式為

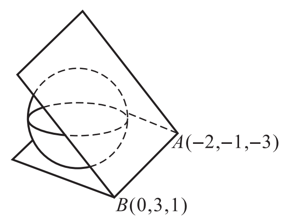
$$(2x-y+5)+\frac{5}{7}(3y-2z-5)=0$$

$$\Rightarrow 7x+4y-5z+5=0.$$

除了上述的例題外，求包含二相交直線的平面方程式，也可應用平面族的概念呢！請自行找個題目試試看！接下來，看個與球面相切之平面方程式的問題：

【例題五】已知球面方程式為$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$，求包含 $A(-2,-1,-3)$、$B(0,3,1)$兩點，且與球面相切的平面方程式？

（分析）如圖可知，過 A、B 兩點且與球面相切的平面有兩種情形。



▲圖 4

【解法一】設所求平面與球面的切點$P(a,b,c)$，且球心為 $Q(1,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$，則平面的法向量 $\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{QP}=(a-1,b-1,c-1)$，因此，

(1) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QP}=0$

$\Rightarrow a+2b+2c-5=0$ ⋯①

(2) $\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{PA}\Leftrightarrow\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PA}=0$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+a+2c-6=0$ ⋯②

(3)點 $P(a,b,c)$ 在球面上

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$⋯③

② − ③　$3a+2b+4c-7=0$ ⋯④

④ − ①　$2a+2c-2=0 \Rightarrow c=1-a$，代入①，

得 $a=2b-3$，所以 $c=4-2b$，代入③，

$$(2b-4)^2+(b-1)^2+(3-2b)^2=2$$

$$\Rightarrow 3b^2-10b+8=0 \Rightarrow b=2 \text{ 或 } b=\frac{4}{3},$$

當 $b=2$，則 $a=1$，$c=0$，所以切點 $P(1,2,0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP}=(0,1,-1)$，所以取平面法向量 $\overrightarrow{n}=(0,1,-1)$，

所求平面方程式為

$$y-z-2=0.$$

當 $b=\frac{4}{3}$，則 $a=-\frac{1}{3}$，$c=\frac{4}{3}$，所以切點 $P(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP}=(-\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}(4,-1,-1)$ 所以取平面法向量 $\overrightarrow{n}=(4,-1,-1)$，所求平面方程式為

$$4x-y-z+4=0.$$

【解法二】設所求平面與球面的切點 $P(a,b,c)$，且球心為 $Q(1,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$，則切平面方程式為

$$(a-1)(x-1)+(b-1)(y-1)+(c-1)(z-1)=2$$

$$\Rightarrow (a-1)x+(b-1)y+(c-1)z+(1-a-b-c)=0 \cdots (*)，$$

所以法向量 $\overrightarrow{n}=(a-1,b-1,c-1)$ 因此，

(1) $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (a-1,b-1,c-1)\cdot(2,4,4)=0$

$\Rightarrow a+2b+2c-5=0$

(2)點 $A(-2,-1,-3)$ 在平面上，代入(*)

$\Rightarrow 3a+2b+4c-7=0$

(3)點 $P(a,b,c)$ 在球面上

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$

上述所得條件式與解法一相同，就不再詳解。

【解法三】由於過 A、B 兩點可決定一直線，故所求平面可應用平面族定理寫出，再由與球面相切決定之。已知球心為 $Q(1,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$，先求出直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的對稱比例式為

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2},$$

則其兩面式可表示成

$$\begin{cases}\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-y+3=0\\ y-z-2=0\end{cases},$$

根據平面族定理，包含直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的平面可寫成

$$(2x-y+3)+k(y-z-2)=0$$

$$\Rightarrow 2x+(k-1)y-kz+(3-2k)=0$$

與球面相切，所以

$$d(Q,E)=\frac{|2+(k-1)-k+3-2k|}{\sqrt{4+(k-1)^2+k^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow k=\frac{1}{2},$$

所以，與球面相切的平面方程式為

$$(2x-y+3)+\frac{1}{2}(y-z-2)=0$$

$$\Rightarrow 4x-y-z+4=0.$$

看到此處，不知你的心中是否出現疑問：在一開頭的分析中不是圖示了兩個切平面嗎？那另一個呢？

藉這個機會提醒大家：當我們將所求平面設成 $(2x-y+3)+k(y-z-2)=0$ 時，其實會有個包含直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的平面是不在我們所設的情況之中。不妨再回到證明討論的那一段看看！正是 $y-z-2=0$。這也是各位在使用平面族定理需要注意的地方。驗證一下：球心 $Q(1,1,1)$ 到平面 $y-z-2=0$ 的距離正是 $\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$。

當然了，若一開始平面設成 $(y-z-2)+k(2x-y+3)=0$，就不會有上述的情形。此時，求出的 k 值為

(1) $k=0$，則切平面為 $y-z-2=0$；

(2) $k=2$，則切平面為 $4x-y-z+4=0$。

事實上，除了上述的問題外，平面族定理對於我們理解三元一次聯立方程組的幾何意義與行列式表示法之間的連結，有著很大的助益。這是接下來筆者所要討論的部分。

三元一次聯立方程組之解的幾何意義

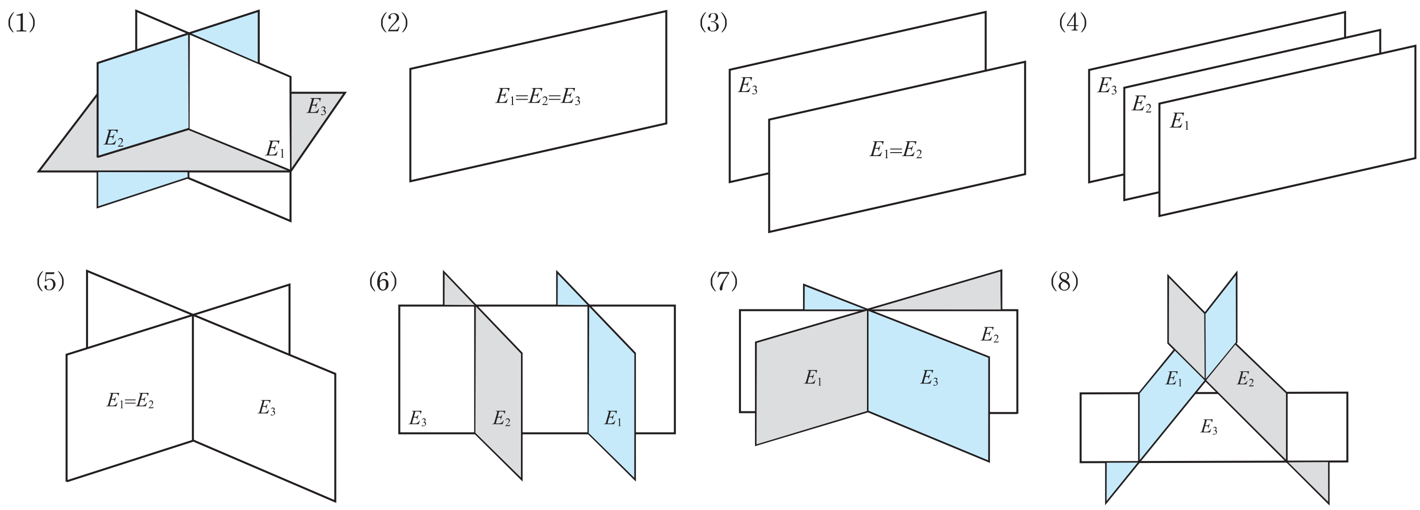
由於方程式 $ax+by+cz+d=0$ 的幾何意義代表空間中的一個平面，因此三元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的解，就是要找出空間中三平面

$$\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

的共同交點坐標。如何求解？解的型態為何？課程安排上是由行列式的觀點切入，得到一般性的判斷準則。課本有詳細過程，此處不加贅述，主要結論及對應圖形整理表列如表(一)所示：

三平面的關係	聯立方程組解的情形	行列式的表示法
(1)三平面交於一點	恰有一解	$\Delta \neq 0$
(2)三平面重合	無限多解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(3)兩平面重合，第三平面平行	無解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(4)三平面平行	無解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(5)兩平面重合，第三平面與其交一直線	無限多解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(6)兩平面平行，第三平面與其各交一直線	無解	$\Delta=0$，且 Δ_x，Δ_y，Δ_z 至少一個不為 0
(7)三平面交於一直線	無限多解	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
(8)三平面兩兩相交一直線且三直線平行	無解	$\Delta=0$，且 Δ_x，Δ_y，Δ_z 至少一個不為 0

▲表(一)



然而，我們想將空間中三平面的相交情形與行列式的表示法建立關係時，關係(1)可由克拉瑪公式來看出；關係(2)至(6)恰為三平面間的平行與重合，與平面方程式係數是否成比例有關，容易與行列式的運算性質銜接，而關係(7)和(8)則是較難直接從行列式的運算性質看出結果，但是由平面族定理則會變得非常容易理解。

以關係(7)－三相異平面交於一線為例，由於 E_1、E_2 及 E_3 相交於一線，所以 E_3 可以表成 $\alpha E_1 + \beta E_2$，也就是說平面 E_3 的方程式

$$a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = 0$$

與

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

等價。故

$$\frac{a_3}{\alpha a_1 + \beta a_2} = \frac{b_3}{\alpha b_1 + \beta b_2} = \frac{c_3}{\alpha c_1 + \beta c_2} = \frac{d_3}{\alpha d_1 + \beta d_2} = t$$

所以

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ t(\alpha a_1 + \beta a_2) & t(\alpha b_1 + \beta b_2) & t(\alpha c_1 + \beta c_2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ t(\alpha d_1 + \beta d_2) & t(\alpha b_1 + \beta b_2) & t(\alpha c_1 + \beta c_2) \end{vmatrix} = 0$$

同理， $\Delta_y = 0$ ，$\Delta_z = 0$

至於關係(8)－三平面兩兩相交於一直線且三直線平行，則可由關係(7)加以延伸，由圖(8)觀察可以看到 E_3 恰與某一個過 E_1 與 E_2 交線的平面 $\alpha E_1 + \beta E_2$ 平行，即平面 $a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = 0$ 與平面 $\alpha(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$ 平行，故 $\frac{a_3}{\alpha a_1 + \beta a_2} = \frac{b_3}{\alpha b_1 + \beta b_2} = \frac{c_3}{\alpha c_1 + \beta c_2} \neq \frac{d_3}{\alpha d_1 + \beta d_2}$。所以 $\Delta = 0$ ，而且 Δ_x，Δ_y，Δ_z 至少一個不為 0。

再一次看見「平面族定理」的威力了吧！找幾個例題來實地演練一下。

【例題六】試判斷聯立方程組

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \cdots ① \\ 2x + y - z = 5 \cdots ② \\ 7x + 8y + z = 31 \cdots ③ \end{cases}$$

所表示的三平面關係。

【解】因為方程式的係數並無成比例的關係，可判斷無平行或重合的關係，不是關係(2)到關係(6)！

考慮係數行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ 表示不是關係(1)，再來決定是關係(7)（無限多解）或是關係(8)（無解）。

再來，由三個平面法向量的線性組合，考慮 $\alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 1, -1) = (7, 8, 1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$ 所以① × 3 + ② × 2 得，

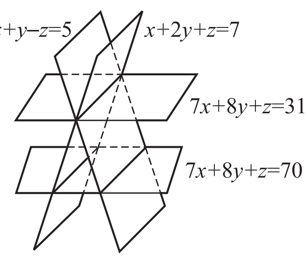
$7x + 8y + z = 31 \cdots ④$

由於④式與③式相等。表示③式可以寫成①式與②式的線性組合。

由平面族定理可知：三平面交於一線，故無限多解。

接著考慮以下狀況：若將題目中的③式改成 $7x + 8y + z = 70$，則結果為何呢？

如此一來，則④式 // ③式，如圖 5，表示三平面兩兩交於一線，三交線平行，無解。



▲圖 5

【例題七】若方程組 $\begin{cases} 5x+3y-\ \ z=-1 \cdots ① \\ 2x+\ \ y+2z=\ \ a \cdots ② \\ \ \ x+4y+bz=\ 10 \cdots ③ \end{cases}$ 有無限多解，試求 $a=$ ？，$b=$ ？

【解】依題意，由方程式係數可看出三平面相異，又有無限多解，表示三平面交於一線。故考慮法向量的線性組合

$\alpha(5,3,-1)+\beta(2,1,2)=(1,4,b)$

$\begin{cases} 5\alpha+2\beta=1 \\ 3\alpha+\ \ \beta=4 \\ -\alpha+2\beta=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=7 \\ \beta=-17 \end{cases}$，故 $b=-41$

又① × 7 + ② × (– 17) 得方程式

$$x+4y-41z=-7+(-17)a$$

與③式同義，故

$$-7+(-17)a=10 \Rightarrow a=-1.$$

結論

走筆至此，關於平面族定理的種種討論也該告一段落了。我們由向量的運算性質出發，指出了平面族定理的由來，進而討論三元一次聯立方程組解的幾何意義。不知是否看出筆者最想與各位分享的心得——『概念連結』。這也是數學教學過程中，必須想方設法與學生分享的部分，如此一來，才能引領學生將所學得的主題貫穿起來，從而產生源源不斷學習的喜悅！

後記

本文能得以完成，必須感謝中山女高鄭金樹老師的鼓勵。在他的指導與帶領下，讓筆者不論在教材或是教法上，有了更多的想法與成長。藉此機會特別謝謝他！