新北市立高中職102學年度教師聯合甄選

數學科目答案

一、選擇題：(每題 3 分，共 5 題，計 15 分)

1	2	3	4	5
B	B	C	A	D

二、填充題：(每題 5 分，共 5 題，計 25 分)

1	2	3	4	5
12	2736	19	①②③	-5050

三、計算題：(共 4 題，計 60 分)

1. 袋中有黑、白球各一顆，每次從袋中任取一球，取出的球不放回，但再放進一顆黑球，令 a_n 為第 n 次取到黑球的機率。

（1）寫出 a_n 的遞迴關係式。

Ans： $a_1=\frac{1}{2}$ ， $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_{n-1}$ $(n\geq 2)$ ………………………………….. (10 分)

（2）求 a_n 的一般式。

Ans： $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ……………………………………………………... (10 分)

2. 已知有n個任意的正方形紙片，證明：可以用剪刀把它們剪開，然後組拼成一個新的正方形。

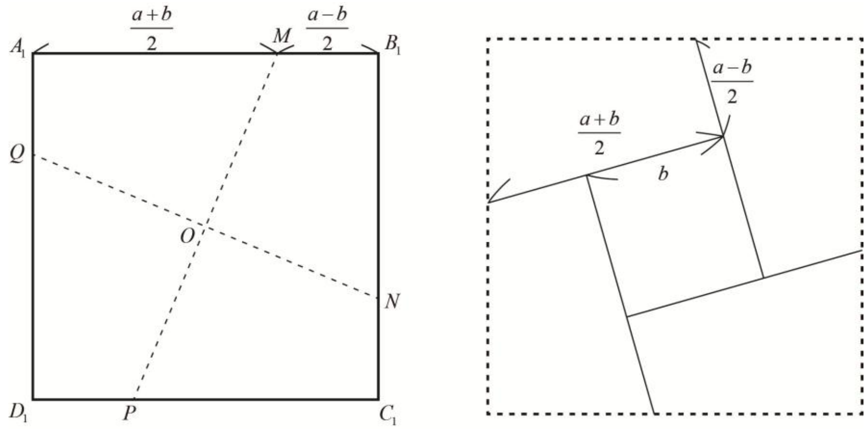
證明：　　　…………………………………………………………………………… (10 分)

（1）當$n=2$時，設兩個正方形$A_1B_1C_1D_1$和$A_2B_2C_2D_2$的邊長為a和b（$a \geq b$）在正方形$A_1B_1C_1D_1$的每個邊上，順序截取A_1M，B_1N，C_1P，D_1Q，使得

$$A_1M = B_1N = C_1P = D_1Q = \frac{a+b}{2}$$

連接$\overline{MP}$及$\overline{NQ}$且令其交於O點，可知$\overline{MP} \perp \overline{NQ}$。

沿著線段$\overline{MP}$及$\overline{NQ}$把正方形$A_1B_1C_1D_1$剪開，得到四塊全等的圖形（有兩個直角），將這四塊圖形與正方形$A_2B_2C_2D_2$合拼成一個新的正方形，如下圖所示：



因此，$n=2$時成立。

（2）假設$n=k$時，成立，則當$n=k+1$時，前k個正方形可以拼成一個新的正方形，把這個正方形依照（1）的方法剪開，截取的線段長是這個新的正方形的邊長及第$k+1$個正方形邊長和的一半，然後和第$k+1$個正方形如（1）的方法拼組成第$k+1$個新的正方形，因此，$n=k+1$時成立。
因此，由數學歸納法知，此命題成立。

3. 某系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：
（1）四件作品的得票情形共有幾種？
（2）得票數最高的作品恰有一件的票數分佈有幾種？
解：

（1）由題意可以知道：

a. 四件作品所得的總票數為 20 票。

b. 每件作品最多可以得到 10 票。

令四件作品的得票數分別為 x、y、z、u，由 a、b 可得

$$x+y+z+u=20\ ，\ 0\le x,y,z,u\le 10$$

因為 $0\le x,y,z,u\le 10$，所以 H_{20}^{4} 須扣掉 $11\le x,y,z,u\le 20$ 的情況。由 $x+y+z+u=20$ 且 $x,y,z,u\ge 0$ 可知最多只有一個票數會大於等於 11，

假設 $x\ge 11$，令 $x=x'+11$，可得

$$x'+y+z+u=9\quad ，\ 0\le x',y,z,u\le 9$$

此情況有

$$H_{9}^{4}=C_{9}^{12}=220\text{ 種。}$$

因此票數分布為

$H_{20}^{4}-4\times H_{9}^{4}=1771-4\times 220=891$ 種。………..…….. (10 分)

（2）假設得票數最高為 x，由題意可得

$$x+y+z+u=20\ ，\ 0\le y,z,u<x\le 10$$

因為 $y,z,u<x$，也就是 $y,z,u\le x-1$，所以

$$x+y+z+u\le x+(x-1)+(x-1)+(x-1)=4x-3$$

由 $x+y+z+u=20$ 得

$$20\le 4x-3$$

即

$$\frac{23}{4}\le x$$

因此，當 $x\ge 6$ 時，才會滿足只有一件作品得票數最高且票數為 x。

當 $x=6$ 時，

$$y+z+u=14\ ，\ 0\le y,z,u\le 5$$

滿足此情況的 y、z、u 有（5,5,4）、（5,4,5）、（4,5,5）3 種。

當 $x=7$ 時，

$$y+z+u=13\ ，\ 0\le y,z,u\le 6$$

因為 $y+z+u=13$ 且 $y,z,u\ge 0$，所以 y、z、u 最多只有一個會大於等於 7

由（1）可知滿足此情況有

$$H_{13}^{3}-3\times H_{6}^{3}=C_{13}^{15}-3\times C_{6}^{8}=105-84=21\text{ 種。}$$

同理

當 $x=8$、9、10 時，y、z、u 最多只有一個會大於等於 8、9、10，故

當 $x=8$ 時，有

$$H_{12}^3-3\times H_4^3=C_{12}^{14}-3\times C_4^6=91-45=46\text{種。}$$

當 $x=9$ 時，有

$$H_{11}^3-3\times H_2^3=C_{11}^{13}-3\times C_2^4=78-18=60\text{種。}$$

當 $x=10$ 時，有

$$H_{10}^3-3\times H_0^3=C_{10}^{12}-3\times C_0^2=66-3=63\text{種。}$$

因此滿足只有一件作品得票數最高的情形有

$4\times(3+21+46+60+63)=772$ 種。…………………………..….. (10 分)

4. 試求所有滿足以下不等式的正整數 (a,b,c)：

$$\frac{41}{42}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$$

解：

不妨設 $a\le b\le c$，並將原不等式改寫成

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1 \qquad (*)$$

顯然，$a\ge 2$。若 $a\ge 3$，則

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1 & \text{當}c=3\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<\frac{41}{42} & \text{當}c\ge 4\end{cases}$$

均與已知不等式不合，故得 $a=2$。若 $b\ge 4$，則

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 & \text{當}c=4\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<\frac{41}{42} & \text{當}c\ge 5\end{cases}$$

均與已知不等式不合，故得 $b=3$。將 $a=2, b=3$ 代入$(*)$式，可得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}<1$$

由此可知 $\frac{1}{7}\le\frac{1}{c}<\frac{1}{6}$，得 $c=7$。因此，所求的正整數解 (a,b,c) 為

$(2,3,7), (2,7,3), (3,2,7), (3,7,2), (7,2,3), (7,3,2)$。…………………………….. (10 分)