

國立竹北高中 102 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選 數學 科試題

1. 把 1~10 十個自然數不重複填至表中的十個空格，若同一列中，右必比左大，而同一行中，上必比下大，則有_____種填法。

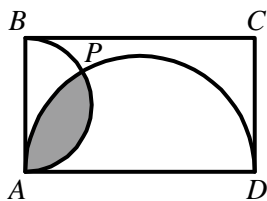
| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
| | | | | |

2. 火柴棒可排成數字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 等十個數字如下圖：



若以 15 根火柴棒排成三位數，數字「不可」重複，共有_____種排法。

3. 參考下圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$ ， $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{AD} 為直徑作半圓交於 P ，則鋪色區域面積為_____。



4. 已知單位圓上有六個等分點，現自其中任取三個點連成三角形，設每一點被取到的機率相同，則所取的三角形面積的期望值為_____。
5. 設方程式 $x^2 + (m+2)x + (m+5) = 0$ 的兩根為 $\tan \alpha$ 與 $\tan \beta$ ，若 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{n-1}(\alpha + \beta)$ 為收斂，則 m 之範圍為_____。

6. 在某一地區的鐵路公司，出售每一車站到線上他任何車站之車票（由 A 站到 B 站的車票與由 B 站到 A 站的車票是為不同）。由於最近線上增設多於 1 個新的車站而需要製作新的車票，另必須新增 52 種新的車票，則增設後線上共有_____個車站。
7. 坐標空間中， $x^2 + y^2 \leq 1$ 表示一個圓柱體，則此圓柱體夾在平面 $2x + 2y + z = 9$ 與平面 $z = 0$ 之間的體積為_____。
8. 若 $\triangle ABC$ 的三中線長分別為 5、 $\sqrt{73}$ 、 $2\sqrt{13}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。
9. 設正整數 a 與 18 的最小公倍數與最大公因數之差為 120，試求 $a =$ _____。
10. 求方程式 $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ 的六個根在複數平面上，所形成六邊形區域之面積_____。
11. F 與 F' 為雙曲線 $\Gamma: 5x^2 - y^2 = 20$ 之兩焦點， $P(3, -5)$ 為 Γ 上一定點，則 $\angle FPF'$ 的內角平分線方程式為_____。
12. 設 P 為圓 $C: x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 上的動點， Q 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ 上的動點，求 P 與 Q 的最大距離為_____。
13. 設 $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} =$ _____。

14. 設 a_n 為所有 10^n 所有正因數的總和，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{10^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 設 m 為實數，若 $3^{2x} - 2(m+1) \cdot 3^x - (m-1) = 0$ 有兩個相異的實根，求 m 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 設 $\frac{1}{2p} + \frac{1}{3q} = 9$ ，其中 p, q 為正數，已知當 $p = k, q = l$ 時 $2\log_{\frac{1}{6}} p + \log_{\frac{1}{6}} q$ 有最大值 M ，求數對 (k, l, M) 之值 $\underline{\hspace{2cm}}$.
17. 設直線 $8x - 8y + 7 = 0$ 將兩直線 L_1 與 L_2 之夾角平分，若 $L_1: 6x - 2y - 1 = 0$ ，則 L_2 的方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$.
18. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{DA} = \sqrt{6}$ ，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \underline{\hspace{2cm}}$.
19. 考慮雙曲線 $y^2 - x^2 = 1$ 圖形的上半部，取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸進線 $y = x$ 的距離，記為 d_n ，其中 n 為正整數。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n) = \underline{\hspace{2cm}}$.
20. 已知三次函數 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$ 的圖形與二次函數 $g(x) = x^2 + 4x + a$ 的圖形有一個交點，求實數 a 的範圍 .