

102 學年度南臺灣國民中學教師甄選命題策略聯盟筆試試題

專門科目-數學

說明：

本試卷共 50 題，均為四選一之單選題。每題 2 分，共 100 分。

1. 已知一個二位數是其數字和的 n 倍，如果將此二位數的十位數字與個位數字互換得到一個新的二位數，則此新數是其數字和的幾倍？

(A) $9-n$ (B) $10-n$ (C) $11-n$ (D) $n-1$

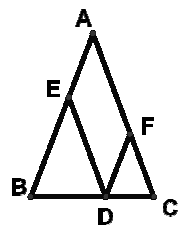
2. 自 $1, 2, 3, \dots, 9$ 這 9 個數中選出 7 個不同的數相加，其和是 3 的倍數，試問共有多少種不同的選法滿足上述條件？

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， D, E, F 分別為三邊 \overline{BC} , \overline{AB} 及 \overline{AC} 上的點，使得

$\overline{AE} \parallel \overline{DF}$ 與 $\overline{AF} \parallel \overline{ED}$ 。則四邊形 $AEDF$ 的周長為何？

(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35



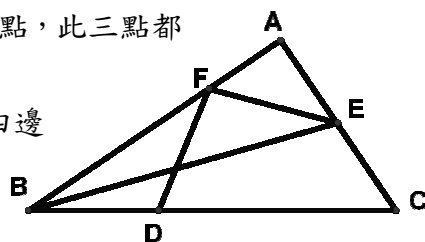
4. 設 $\alpha, \beta, p, q, r, s$ 為實數，如果 $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 為方程式 $x^2 - px + q = 0$ 的二根，且 $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$ 為方程式 $x^2 - rx + s = 0$ 的二根，則 rs 等於下列何者？

(A) pq (B) $\frac{1}{pq}$ (C) $\frac{p}{q^2}$ (D) $\frac{q}{p^2}$

5. 已知三角形 ABC 的面積為 10，且 D, E, F 分別為邊 \overline{BC} , \overline{AC} 及 \overline{AB} 上的點，此三點都

異於 A 點，使得 $\overline{BD} = 2$, $\overline{DC} = 3$ ，如圖所示。如果 $\triangle BCE$ 的面積等於四邊形 $DCEF$ 的面積，試問 $\triangle BCE$ 的面積為何？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$



6. 試問方程式 $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 共有多少個整數解 x ？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 試問子空間 $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ 的維度(dimension)為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 已知 a, b, x, y, z 皆為非負整數，試問共有多少組解 (a, b, x, y, z) 滿足方程式 $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ？

(A) 20 (B) 21 (C) 65 (D) 121

9. 試問 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$ 之值為下列何者？

(A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 不存在

10. 已知實數 a, b, c 滿足條件 $a = \sqrt{2} + b$ ，且 $2ab + 2\sqrt{2}c^2 + 1 = 0$ ，試問下列何者不正確？

(A) $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $a + b + c = 0$

11. 已知 $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $w = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ，其中 $i^2 = -1$ ，試問下列何者不正確？
 (A) $z^5 + w^5 = -1$ (B) $z^7 + w^7 = -1$ (C) $z^9 + w^9 = -1$ (D) $z^{11} + w^{11} = -1$
12. 已知 $n = 1 + 5 \times 69 + 10 \times 69^2 + 10 \times 69^3 + 5 \times 69^4 + 69^5$ ，試問 n 的正因數共有多少個？
 (A) 3 (B) 69 (C) 125 (D) 216
13. 已知正數 a, b 滿足條件 $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$ ，則 $\frac{b}{a}$ 之值為何？
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
14. 試問共有多少組實數解數對 (x, y) 滿足方程組 $x + y + xy = 19$ 與 $x^2 + y^2 = 25$ ？
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
15. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 3\angle A$, $\overline{AB} = 48$, $\overline{BC} = 27$ ，則 $\overline{AC} = ?$
 (A) 33 (B) 35 (C) 37 (D) 39
16. 化簡 $4\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{97-56\sqrt{3}}$ 之值為下列何者？
 (A) 3 (B) 4 (C) $6-3\sqrt{3}$ (D) $5-2\sqrt{3}$
17. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{3\pi}{n}}{n} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n} \right)$ 之值為下列何者？
 (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{\pi}$ (D) $\frac{2}{\pi}$
18. 如果 $y = f(x)$ 為微分方程式 $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)$ 的解，且滿足條件 $f(0) = \frac{3}{2}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 之值為何？
 (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3
19. 以下矩陣都是 n 階方陣，下列何者為正確？
 (A) 如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{CB}$ ，且 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{A} = \mathbf{C}$
 (B) 如果 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ，則 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (其中 \mathbf{I} 為單位矩陣)
 (C) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$
 (D) 如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ，則 \mathbf{A} 的轉置矩陣 \mathbf{A}^T 必為可逆。
20. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如： $[0.9] = 0$ 及 $[1.6] = 1$ ， $[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 256]$ 之值為何？
 (A) 36 (B) 650 (C) 1538 (D) 1546
21. 設 n 為正整數，如果 $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ 為一質數，試問滿足這樣條件的所有可能 n 值共有多少個？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
22. 試問滿足方程式 $(x^2 + y^2 - 4)^2 (xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0$ 共有幾組實數解 (x, y) ？
 (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10
23. 設 x, y 為實數，如果 x, y 滿足條件 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ ，則 $\frac{y}{x}$ 之最大值為何？
 (A) $2+\sqrt{3}$ (B) $3+2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) 6

24. 設 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ，下列何者為正確？

- (A) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$ (B) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$
 (C) $f(x, y)$ 在點 $(0, 0)$ 處不連續 (D) 函數 f 在 $(0, 0)$ 處不可微分

25. 已知函數 f 的定義域為所有正整數，且滿足條件 $f(1) = 2013$ 及對於任意正整數 $n > 1$ ，

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n) \text{ 成立，試問 } f(2012) \text{ 之值為何？}$$

- (A) $\frac{1}{2012}$ (B) $\frac{1}{1006}$ (C) $\frac{2012}{2013}$ (D) 2012

26. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx =$ (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (D) $\sqrt{\pi}$

27. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2; x, y \geq 0\}$ ； $\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy =$

- (A) $\frac{1}{e} - e$ (B) $-\frac{1}{e}$ (C) $e + \frac{1}{e}$ (D) $e - \frac{1}{e}$

28. $\Gamma = \{z(\theta) : z(\theta) = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ ， a 為任意實數，則 $\int_{\Gamma} \frac{e^{az}}{z} dz =$

- (A) πi (B) $-\pi i$ (C) $2\pi i$ (D) $-2\pi i$

29. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x - 4} =$ (A) $\frac{-1}{16}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{-1}{8}$ (D) $\frac{1}{7}$

30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) =$ (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (D) $\sqrt{\pi}$

31. $[\cdot]$ 是高斯函數， $\lim_{x \rightarrow 3} [x - [x]] =$ (A) 0 (B) -1 (C) 3 (D) 2

32. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 7\theta}{\sin 3\theta} =$ (A) 7 (B) 3 (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{7}{3}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^6, & x \in \mathcal{Q} \\ x^2, & x \notin \mathcal{Q} \end{cases}$ ； $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ (A) 1 (B) 0 (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{7}{3}$

34. 若 $h(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - x - a + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 處連續，則 $a =$ (A) 3 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{7}{3}$

35. 若 $f'(k)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{xf(k) + -kf(x)}{x - k} =$

- (A) $f(k) + kf'(k)$ (B) 0 (C) $kf'(k) - f(k)$ (D) $f(k) - kf'(k)$

36. $[\cdot]$ 是高斯函數，則 $g(x) = x[x]$ 在 $x = 1$ (A) 可微 (B) 不可微 (C) 不連續 (D) 以上皆非

37. $\int \frac{3^{\ln x}}{x} dx =$ (A) $\frac{1}{3} 3^x + c$ (B) $\frac{1}{\ln 3} 3^{\ln x} + c$ (C) $\frac{1}{3} 3^{\ln x} + c$ (D) $\frac{1}{\ln 3} 3^x + c$

38. $\int \sin^{-1} x dx =$ (A) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$ (B) $x \sin^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c$ (C) $x \cos^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(D) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 是 (A) 發散 (B) 絕對收斂 (C) 條件收斂 (D) 以上皆非
40. 瑕積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 是 (A) 發散 (B) 收斂到 $\frac{\pi}{2}$ (C) 收斂到 $\frac{\pi}{4}$ (D) 以上皆非
41. H 是 G 的正規子群 (normal subgroup), H 、 G 的 order 分別是 3、21, 請問商群 (factor group or quotient group) G/H 的 order 是多少? (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
42. 設 $k \in R$, 對任意 $x \geq 0$, 恆有 $x^3 - 2x^2 - 4x + k > 0$, k 的範圍是
(A) $7 < k$ (B) $8 < k \leq 9$ (C) $7 < k \leq 8$ (D) $8 < k$
43. 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 1 = 0$ 與直線 $L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ 交於 A, B 二點, \overline{AB} 線段長 = (A) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (B) $\frac{1}{3\sqrt{13}}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
44. $L_1: \begin{cases} x=12+t \\ y=11-3t \end{cases}, t \in R; L_2: \begin{cases} x=-3+4t \\ y=1-t \end{cases}, t \in R$ 兩直線之交點為
(A) (16, -5) (B) (17, -4) (C) (18, -6) (D) (17, -6)
45. 方程組 $\begin{cases} 5x+3y-z=0 \\ 2x+y+3z=a \\ x+4y+bz=17 \end{cases}$ 有無限多組解, 則 $a+b=$ (A) -56 (B) -57 (C) -58 (D) -59
46. $x+y+z=7$ 、 $y=z$ 兩平面之夾角是 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{5}$
47. 過 $P(1, -3, -5)$ 、 $P(2, 1, 7)$ 兩點之直線的對稱式為 (A) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+5}{12}$
(B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+5}{1}$ (C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{12}$ (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{12}$
48. 若 α 、 β 、 γ 為任意三角形之三個內角, 則 $\begin{vmatrix} \tan \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \tan \beta & 1 \\ 1 & 1 & \tan \gamma \end{vmatrix} =$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
49. 點 $P(1, -1)$ 到直線 $3x+4y=7$ 的距離是 (A) $\frac{4}{5}$ (B) 1 (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{8}{5}$
50. $x, y \in R$ 且 $x^2 + y^2 = 16$, 則 $3x-4y$ 的最大值為 (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20