

台北市立內湖高工 103 學年度數學教師甄選筆試試題

一、填充題 50% (每格 5 分)

1. 求 $\int_0^4 |x - \sqrt{16 - x^2}| dx = \underline{(1)}$ 。
2. 若以方程式 $x^3 = 4 - 4\sqrt{3}i$ 三根畫在複數平面上，則以此三點為頂點所形成三角形的面積為 $\underline{(2)}$ 。
3. 已知平面上三點 $A(3, -5)$ 、 $B(4, 3)$ 、 $P(103, 2014)$ 。若 C 點滿足 $\overrightarrow{PC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$ ，則 C 點坐標為 $\underline{(3)}$ 。
4. 設 a, b, c 為正數。若 $a^b = 1, b^c = \frac{1}{3}, c^a = \frac{1}{2}$ ，則 $abc = \underline{(4)}$ 。
5. 已知斜率為 2 的直線與圓 $x^2 + y^2 = 16$ 相切，則此直線與坐標軸所圍成三角形的面積為 $\underline{(5)}$ 。
6. 已知 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ ，求 $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \underline{(6)}$ 。
7. 若兩拋物線 $x^2 + 6x + y + 9 = 0$ 與 $4x^2 + 24x - y + 37 = 0$ 上各取一個點，則兩點距離的最小值為 $\underline{(7)}$ 。
8. 不等式 $\frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - x - 2} \leq 1$ 的解為 $\underline{(8)}$ 。
9. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ 。若 $\log A = -2.2219$ ，則 $A = \underline{(9)}$ 。
10. 已知平面上不共線三點 A 、 B 、 C 。若 P 為 $\triangle ABC$ 內一點，滿足 $\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ，則三角形面積的比 $\triangle PAB : \triangle PAC : \triangle PBC$ 為 $\underline{(10)}$ 。

二、計算題，無計算過程不給分。40% (每題 10 分)

1. 求方程組 $\begin{cases} 29x - 11y + 5 = 0 \\ 43x + 23y + 31 = 0 \end{cases}$ 的解。
2. 求 $C_0^9 + \frac{1}{2}C_1^9 + \frac{1}{3}C_2^9 + \frac{1}{4}C_3^9 + \frac{1}{5}C_4^9 + \frac{1}{6}C_5^9 + \frac{1}{7}C_6^9 + \frac{1}{8}C_7^9 + \frac{1}{9}C_8^9 + \frac{1}{10}C_9^9 = ?$
3. 求 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 1}$ 的相對極大值及相對極小值。
4. 已知平面上三點 $A(-2, 4)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(-3, -2)$ 形成 $\triangle ABC$ 。求 $\tan A = ?$

三、證明題 10%

1. 自一平均為 μ 、變異數為 σ^2 之母體取出一組隨機樣本 X_1, X_2, \dots, X_n 。請證明樣本變異數

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ 為母體變異數為 } \sigma^2 \text{ 的不偏估計量。}$$

(即證明 s^2 的期望值為 σ^2) 其中 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ 為樣本平均。