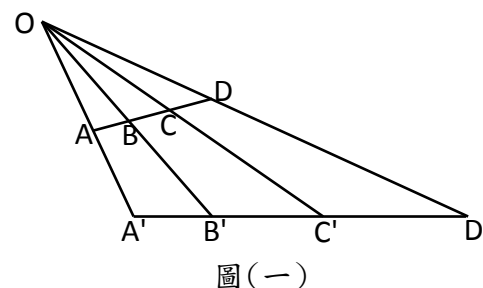


國立嘉義高級中學 103 學年度第 1 次教師甄選—數學科試題

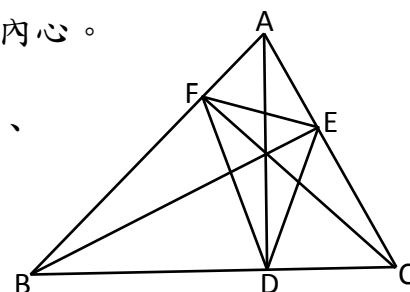
一、填充題(每格 5 分，共 75 分)

1. 若 z 為複數，且滿足 $z + \frac{1}{z} = 1$ ，則 $z^{103} + \frac{1}{z^{103}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 一個正四面體的各稜邊長皆為 6，則此四面體的體積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 在空間中，點 $A(1, 2, -1)$ 在直線 $L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-6}{1}$ 的投影點的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 有 n 個人玩擲骰子的遊戲，每個人都擲兩個公正的骰子。若要使「至少有一人擲出兩骰子都是 1 點」的機率高於 50%，則 n 至少是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(註: $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$)
5. 設 $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, n 為自然數，則無窮級數 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$ 之和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 設 a, b, c 三數滿足 $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 31 \end{cases}$ 且 $a > b > c$ ，令 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = 0$ ，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 若 α, β 為 $x^2 - x - 1 = 0$ 的二根，令 $P_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，則 P_9 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若 \overline{AB} 為橢圓 $4x^2 - 4x + y^2 - 8 = 0$ 的一弦，且 \overline{AB} 之中點為 $(1, 1)$ ，則直線 AB 的方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 若 x 是非零實數且 $m = \frac{3x^4 + 1}{4x^3}$ ，則 m 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 如圖(一)，點光源 O 將 \overline{AD} 投影到 $\overline{A'D'}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$ ，
若 $\overline{A'B'} = 3$ ， $\overline{B'C'} = 5$ ，則 $\overline{C'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



圖(一)

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = 8$ ， P 為任意一點，則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 已知銳角三角形的三高交點為垂心，而此垂心是三個垂足點所成三角形的內心。
如圖(二)，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ ，且 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = 8$ ，則 $\triangle DEF$ 之周長為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 在坐標平面上有五個點 $P_1(1, 1)$ 、 $P_2(2, \frac{1}{2})$ 、 $P_3(3, \frac{1}{3})$ 、 $P_4(4, \frac{1}{4})$ 、 $P_5(5, \frac{1}{5})$ 。



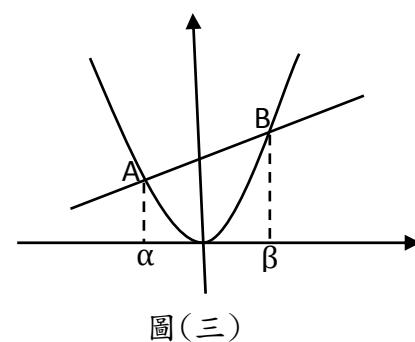
圖(二)

(1) 請用拉格朗日(Lagrange)插值法找一個四次函數 $y = f(x)$ 通過上述五個點來估計 $f(6)$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 請對上述五個點，以最小平方方法求得的最佳直線來求 $P_6(6, t)$ ，則 t 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

x	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	t

14. 如圖(三)，設 $A(\alpha, \alpha^2)$ ， $B(\beta, \beta^2)$ 在拋物線 $y=x^2$ 上移動，若直線 AB 和拋物線所圍面積為定值 $\frac{4}{3}$ ，則 \overline{AB} 的中點的軌跡方程式為_____。



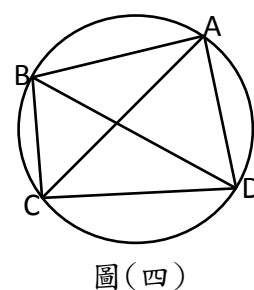
二、計算及證明題(共 25 分)

1. 試求滿足 $103x+17y=2014$ 的所有正整數解及一般整數解。(10 分)

2. 已知托勒密(Ptolemy)定理：

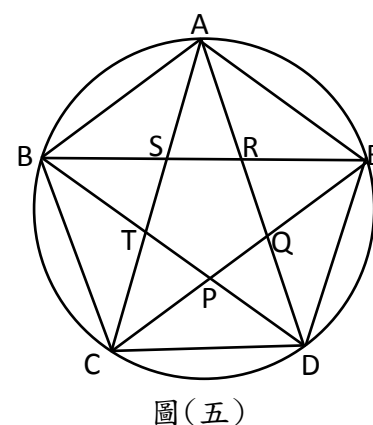
若 A 、 B 、 C 、 D 四點依次構成一個圓內接四邊形，

則 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ 。(如圖(四))



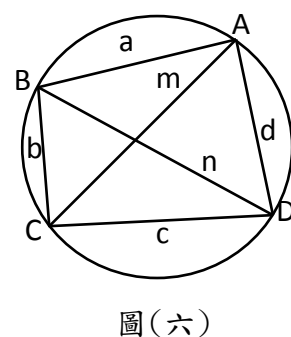
- (1) 如圖(五)，給定正五邊形 $ABCDE$ ， $\overline{AB} = 1$ ，則由五對角線所圍成正五邊形 $PQRST$ 的面積是正五邊形 $ABCDE$ 的面積的幾倍?(化成最簡比) (5 分)

正五邊形 $PQRST$ 的面積是正五邊形 $ABCDE$ 的面積的幾倍?(化成最簡比)



- (2) 如圖(六)，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，設 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{CD} = c$ 、 $\overline{DA} = d$ 、 $\overline{AC} = m$ 、 $\overline{BD} = n$ ，

試證： $\frac{m}{n} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$ 。



(10 分)