

臺北市立松山家商103學年度第1次教師甄選初試

數學科 試題卷

說明：本試題共兩頁，請將答案寫在答案卷上。

一、填充題：(每格 6 分)

1. 函數 $f(x) = 1 + \log_3 x$ 其中 $1 \leq x \leq 9$ ，則函數 $f^2(x) + f(x^2)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M+m=$ _____。
2. 已知 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $|\overline{AB}| = 4$ ， $|\overline{AC}| = 6$ ，則 $\overline{AO} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC}) =$ _____。
3. 有 4 位同學參加電視台猜獎遊戲，競賽規則規定：每位同學必須從甲、乙兩道題中任選一題作答，選甲題答對得 21 分，答錯扣 21 分；選乙題答對得 7 分，答錯扣 7 分。若幾位同學的總分為 0，試求這 4 位同學得分的情況有_____種。
4. 設 $a_n = (-1)^{n+1}$ ， $n \in N$ ， $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ， $n \in N$ ， $C_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ ， $n \in N$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n =$ _____。
5. 已知 $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ，試求 $\tan^2 18^\circ \cdot \tan^2 54^\circ$ 之值_____。
6. 坐標平面上 $\triangle ABC$ ，其中 $A(2, 1)$ ， $\angle B$ 與 $\angle C$ 的內角平分線分別為 $L_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 1 \end{cases}$ ， $t \in R$ 與 $L_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \end{cases}$ ， $t \in R$ ，試問直線 \overline{BC} 方程式=_____。

7. 設方程式 $x + 2^x = 4$ 的根為 α ， $2^{4-x} = x$ 的根為 β ，試求 $\alpha + \beta =$ _____。

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} =$ _____。

9. 若 P 是正三角形 ABC 內一點，且 $\overline{PA} = 3$ ， $\overline{PB} = 4$ ， $\overline{PC} = 5$ ，求 $\angle APB =$ _____。

10. 若方程式 $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$ 的四根為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ，
試求： $(2-\alpha^2)(2-\beta^2)(2-\gamma^2)(2-\delta^2) =$ _____。

二、計算證明題：(每題10分)

1. 已知： $a > b > c$ ，試證： $a^2b + b^2c + c^2a > ab^2 + bc^2 + ca^2$
2. 甲投擲 2 個骰子，乙投擲 3 個骰子，若甲投擲 2 個骰子中最大的點數為 A，乙投擲 3 個骰子中最大的點數為 B，今規定 $A \geq B$ 時，甲獲勝， $A < B$ 時，乙獲勝，試判斷甲，乙獲勝的機率何者較大，並證明之。
3. 設 $f(x) = (x-a)(x-b)^2(x-c)^3$ ，其中 $a < b < c$ ，若 $f(x)$ 在 $x = -1, 0, 1$ 有極值，求此時 a, b, c 之值各為何？
4. 若圓內接四邊形 ABCD 的四邊分別為 a, b, c, d ， $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ ，則
試證：四邊形 ABCD 之面積 $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 。