

1. 將 $4^{17}5^{25}$ 乘開後是多少位數？

- (A) 27
- (B) 28
- (C) 29
- (D) 30

2. 有一邊長為 2 的正方形，今將此正方形截去四個大小相同的角後，變成正八邊形，則此正八邊形的邊長為多少？

- (A) $\sqrt{2} - 1$
- (B) $2 - \sqrt{2}$
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $2\sqrt{2} - 2$

3. 設 $\{a_n\}$ 為一等差數列，已知它的第 5 項 $a_5 = 88$ ，第 8 項為 $a_8 = 79$ ，則使 a_n 為負數的最小正整數 n 值為多少？

- (A) 35
- (B) 36
- (C) 37
- (D) 38

4. 已知 a, b 為實數，且 $a \neq 0$ ，如果一多項式 $f(x)$ 除以 $ax + b$ ，得商 $q(x)$ ，餘式為 r ，試問下列何者正確的？

- (A) $f(x)$ 除以 $x + \frac{b}{a}$ ，得商 $q(x)$ ，餘式為 r
- (B) $xf(x)$ 除以 $ax + b$ ，得商 $xq(x) - \frac{r}{a}$ ，餘式為 $\frac{br}{a}$
- (C) $xf(x)$ 除以 $ax + b$ ，得商 $xq(x) + \frac{r}{a}$ ，餘式為 $-\frac{br}{a}$
- (D) $x^2f(x)$ 除以 $ax + b$ ，得商 $x^2q(x) + \frac{r}{a}x - \frac{br}{a^2}$ ，餘式為 $-\frac{b^2r}{a^2}$

5. 設多項式 $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$ ，則 $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})$ 之值為下列何者？

- (A) 1
- (B) i
- (C) $-i$
- (D) -1

6. 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，則 $x^7 + \frac{1}{x^7}$ 之值為多少？

- (A) 843
- (B) 844
- (C) 845
- (D) 846

7. 已知 m, n 為正整數，如果 $m^2 - n^2 = 120$ ，則滿足這樣條件的所有可能數對 (m, n) 共有幾組？

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

8. 化簡 $\sqrt{64 + 32\sqrt{3}} - \sqrt{97 + 56\sqrt{3}}$ 之值為下列何者？

- (A) -3
- (B) -4
- (C) -5
- (D) -6

9. 設 n 為整數，如果 $\frac{4n}{n^2 + n + 2}$ 為整數，則滿足這樣條件的 n 值共有多少個？

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 5
- (D) 6

10. 令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 A 的核空間(null space) $N(A)$ 之維度(dimension)為何？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

11. 已知一個七位數 $23ab421$ 是 99 的倍數，其中 a, b 為 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中的數字，則 b 值為下列何者？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

12. 試問無窮級數 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)} + \cdots$

之值為下列何者？

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) 1
- (D) $\frac{3}{2}$

13. 已知一多項式 $f(x) = x^{2014}(x^2 + ax + b)$ ，其中 a, b 為實數，如果將 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ ，得到餘式為 $2^{2014}(x-2)$ ，則 $b = ?$

- (A) -3
- (B) -2
- (C) 2
- (D) 3

14. 設 a, b 為實數，如果方程式 $x^3 + ax + b = 0$ 之一複數根為 $1+i$ ，則 $a = ?$

- (A) -4
- (B) -2
- (C) 2
- (D) 4

15. 試問方程式 $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x = 2$ 之實數解 x 為下列何者？

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 16
- (D) 32

16. 試問 $\int_2^{2+\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx = ?$

- (A) -1
- (B) $-\frac{1}{2}$
- (C) 0
- (D) 1

17. 令 $a = 3 - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{5} - 2$ 及 $c = 5 - 2\sqrt{5}$, 則此三數由小而大的排列順序為下列何者?

- (A) $a < c < b$
- (B) $a < b < c$
- (C) $b < a < c$
- (D) $b < c < a$

18. 試問 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$

- (A) 0
- (B) $\frac{\pi}{2}$
- (C) π
- (D) 發散

19. 設 a, b, c 為正實數, 如果 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, 試問 $\frac{c}{a+b}$ 的最小值為多少?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) 1

20. 設 n 為正整數, 如果二次函數 $y = 8^n x^2 - 2^n(2^n + 1)x + 1$ 的圖形與 x 軸交於二點 A_n 、 B_n ,

令線段 $\overline{A_n B_n}$ 之長為 L_n , 則 $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = ?$

- (A) $\frac{2}{3}$
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) 1
- (D) $\frac{4}{3}$

21. 下列哪一個選項是正確?

- (A) $5^{56} < 31^{28} < 17^{35} < 10^{51}$
- (B) $5^{56} < 17^{35} < 10^{51} < 31^{28}$
- (C) $5^{56} < 10^{51} < 17^{35} < 31^{28}$
- (D) $17^{35} < 5^{56} < 10^{51} < 31^{28}$

22. 二平面 $x+2y-3z+3=0$ 與 $-x-2y+3z=10$ 之間的距離為下列何者？

- (A) $\frac{7}{\sqrt{14}}$
- (B) $\frac{13}{\sqrt{14}}$
- (C) $\frac{7}{3}$
- (D) $\frac{7}{2}$

23. 試問 $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ$ 之值為下列何者？

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) $\sqrt{3}$

24. 試問 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = ?$

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) 1
- (D) 2

25. 試問下列何者恆為正確？

(A) 已知 V 為 \mathbb{R}^n 的子空間(subspace)，如果 $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ 且 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

為線性獨立(linearly independent)，則 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 必為 V 的一組基底(basis)。

(B) 令 $V = \text{Span}(\{(1,0,2,3), (0,1,1,1), (1,1,4,4), (2,-2,1,2)\})$ ，則 $\dim V = 4$ 。

(C) 已知 V 與 W 皆為 \mathbb{R}^n 的子空間，如果 $\dim V = \dim W$ ，則 $V = W$ 。

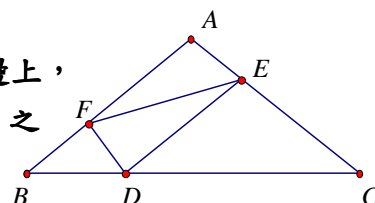
(D) 已知 A 為 n 階方陣，如果 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 為 \mathbb{R}^n 的一組基底，則 $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ 亦為 \mathbb{R}^n 的一組基底。

26. 下列何者是錯誤的？

- (A) 如果 A 為 $m \times n$ 階矩陣，則 $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$ ，其中 A^T 表示 A 的轉置矩陣(transpose)
 (B) 已知 A 、 B 為矩陣使得 AB 有意義，則 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 。
 (C) 已知 A 、 B 為矩陣使得 AB 有意義，則 $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(B)$ 。

(D) $\text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$ 。

27. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 D 、 E 、 F 三點分別在 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 三邊上，使得 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，又 $\triangle BDF$ 之面積為 9， $\triangle AFE$ 之面積為 15， $\triangle DCE$ 之面積為 32，則 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 面積之比值為下列何者？



- (A) $\frac{2}{9}$
 (B) $\frac{1}{4}$
 (C) $\frac{1}{3}$
 (D) $\frac{3}{8}$

28. 已知 $f(1) = 2$, $f'(1) = 1$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x^2)}{x - 1} = ?$

- (A) 1
 (B) 4
 (C) 5
 (D) 6

29. 已知 a 為實數，令 $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + ax + 1$ ，如果 $f(a) = a$ 為 $f(x)$ 之極小值，則 a 值為多少？

- (A) $-\frac{1}{4}$
 (B) 0
 (C) $\frac{1}{4}$
 (D) 1

30. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -5 & 2 \\ 4 & -4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = ?$

- (A) -32
(B) 0
(C) 32
(D) 48

31. 已知實數 a, b 滿足條件 $a - b = 4$ 及 $a^3 - b^3 = 28$ ，則 ab 之值為多少？

- (A) -3
(B) -1
(C) 1
(D) 3

32. 已知 A 為 n 階方陣，下列有關 A 為可逆矩陣的性質是錯誤的？

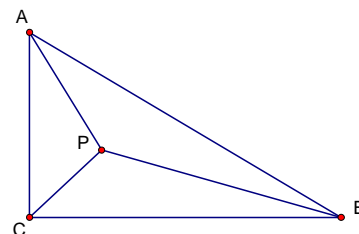
- (A) 齊次線性方程組 $Ax = 0$ 只有一組解 $x = 0$ 。
(B) 對任意 $b \in \mathbb{R}^n$ ，則方程組 $Ax = b$ 恆有解。
(C) $\text{rank}(A) < n$ 。
(D) $\det(A) \neq 0$ 。

33. 下列何者錯誤？

- (A) 數列 $\{\frac{\ln n}{n}\}$ 為收斂數列。
(B) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 為發散級數。
(C) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 必收斂。
(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$ 為收斂級數。

34. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，使得

$\angle APB = \angle APC = \angle CPB$ ，且 $\overline{PA} = 8, \overline{PC} = 6$ ，如圖所示，則 $\overline{PB} = ?$



- (A) 16
(B) 32
(C) 48
(D) 60

35. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}} \right] = ?$

- (A) $2(\sqrt{2}-1)$
- (B) $\sqrt{2}$
- (C) $2\sqrt{2}$
- (D) $2(\sqrt{2}+1)$

36. 試問 $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = ?$

- (A) $\frac{\pi}{4}$
- (B) $\frac{\pi}{2}$
- (C) π
- (D) $\frac{\pi^2}{4}$

37. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 4 \\ ax+b, & x > 4 \end{cases}$ 其中 a, b 為實數，如果 $f'(4)$ 存在，則 $a+b$ 之值為何？

- (A) -16
- (B) -8
- (C) 8
- (D) 16

38. 已知 $a = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \square^n$ 且 $b = (1, 2, 3, \dots, n) \in \square^n$ ，如果 θ_n 為二向量 a 與 b 的夾角，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = ?$

- (A) $\frac{\pi}{6}$
- (B) $\frac{\pi}{4}$
- (C) $\frac{\pi}{3}$
- (D) $\frac{\pi}{2}$

39. 設 n 為正整數，如果乘積 $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{n})$ 為整數，則 n 恆滿足下列何者？

- (A) n 為奇數
- (B) n 為偶數
- (C) n 為 3 的倍數
- (D) n 為任意正整數

40. 試問滿足方程式 $x^3 - y^3 = 7(x - y)$ 和 $x^3 + y^3 = 5(x + y)$ 之所有實數數對解 (x, y) 共有幾組解？

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7

41. 試問 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+x^2} dx = ?$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) $\sqrt{5}$
- (D) $2\sqrt{2}$

42. 設 p, q 為質數，試問滿足方程式 $x^2 - (6p - 4q)x + 3pq = 0$ 有二個整數解的所有可能數對 (p, q) 共有幾組？

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6

43. 設 a, b, c 為正整數，如果 a 為 15 的倍數， b 為 12 的倍數及 c 為 21 的倍數，則下列何者恆正確？

- (A) $(a+b+c)^2$ 必為 9 的倍數
- (B) $a+b+c$ 必為 9 的倍數
- (C) $a+b+c$ 必為 2 的倍數
- (D) $a^2+b^2+c^2$ 必為 18 的倍數

44. 設 a 為非負實數，如果一元二次方程式 $x^2 + ax + a + 1 = 0$ 至少有一實數解，則滿足這樣條件的最小 a 值為下列何者？

- (A) $2\sqrt{2} - 2$
- (B) $2\sqrt{2} + 2$
- (C) $3\sqrt{2} - 3$
- (D) $3\sqrt{2} + 3$

45. 試問 $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

46. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n = ?$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 不存在

47. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 $\angle A = 108^\circ$ ，則 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 之比值為何？

- (A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- (B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\frac{3}{2}$
- (D) $\frac{4}{3}$

48. 設 n 為正整數，如果一個 n 位數的 n 個數字正好是 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的一個排列且數字不得重複，而且對所有 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ，此數的前面 k 個數字所組成的 k 位數是 k 的倍數，我們稱滿足這樣條件的 n 位數是一個「好數」；例如 321 是一個三位好數，那麼所有六位數中共有多少個「好數」？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 8

49. 下列哪一個矩陣不能對角化？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

50. 下列何者恆為錯誤？

(A) 設 A、B 都是 n 階方陣，如果 A、B 為相似(similar)矩陣，則 A、B 的特徵多項式必相等。

(B) 設 A 為 n 階方陣，則 A 和它的轉置矩陣 A^T 具有相同的特徵根。

(C) 設 A 為 n 階方陣，則 A 和它的轉置矩陣 A^T 具有相同的特徵向量。

(D) 設 A、B 都是 n 階方陣，則 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 。