

數學試題

1. 定義函數 f 在 0 的值, 使 $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0$ 在 $x = 0$ 連續, 則 $f(0)$ 為
(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) -1
2. 令 $f(x) = \sin 3x$ 求 $f'(0)$
(A) 1 (B) 0 (C) 3 (D) 4
3. 求 $\int_0^1 \int_y^1 \cos x^2 dx dy =$
(A) $\cos 1$ (B) $\sin 1$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2} \sin 1$
4. 求函數 $f(t) = \sin^2 2t - 3 \cos^2 t$ 在 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的範圍內的最大值
(A) $\frac{1}{16}$ (B) -1 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$
5. 設雙曲線 $xy = 1$ 與直線 $x + y - 3 = 0$ 相交於 C, D 兩點, 求線段 \overline{CD} 之中點座標
(A) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (B) (1,1) (C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
6. 設 x 為大於 1000 的自然數, 且被 465 除後的餘數為 30, 則 x 與 465 的最大公因數為
(A) 30 (B) 5 (C) 6 (D) 15
7. 求 $\cos \theta$ 在 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 之平均值
(A) 1 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
8. 設 m 為一實數, 若 $\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 對所有實數 x 都成立, 求 m 的範圍
(A) $-2 < m < 4$ (B) $1 < m < 3$ (C) $0 < m < 1$ (D) $2 < m < 5$

9. 令 $m \mid (35n+26)$ 且 $m \mid (7n+3)$, $m > 1$, n 為任意自然數, 則 $m =$
 (A) 2 (B) 7 (C) 11 (D) 3
10. 求函數 $f(x) = 2 - 24x - 3x^2 + x^3$ 在區間 $-3 \leq x \leq 1$ 的絕對最大值(Absolute maximum)
 (A) 24 (B) 28 (C) 40 (D) 30
11. 設 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 有一臨界點(critical point)為 $(2, 8)$, 則 $a =$, $b =$
 (A) $a = 2, b = 8$ (B) $a = 1, b = 2$ (C) $a = 3, b = 4$ (D) $a = 2, b = 6$
12. 令 a, b 的最大公因數為 $(a, b) = 1$, 則 $(2a+b, a+2b) =$
 (A) 1 (B) 1 或 3 (C) 3 (D) 2
13. 令 a, b 為二次方程式 $x^2 + 7x - 6 = 0$ 的兩根, 求 $a^3 + b^3$
 (A) 500 (B) -300 (C) 400 (D) -469
14. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9+x^3} dx =$
 (A) 21 (B) 18 (C) 42 (D) 0
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}} \right) =$
 (A) $e-1$ (B) e (C) 0 (D) 1
16. 求 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩(rank)
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
17. 令 a, b, c 為三次方程式 $x^3 + 5x + 11 = 0$ 的根, 求 $a^3 + b^3 + c^3$
 (A) -33 (B) 33 (C) 22 (D) -22
18. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式, 且 $f(1+i) = 0$, 則函數 $y = f(x)$ 的圖

形與 x 軸有幾個交點？

- (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3

19. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+y^2} dy dx =$

- (A) $\ln 2$ (B) $\frac{1}{2} \ln 2$ (C) $\ln 3$ (D) 1

20. 令 $1-2i$ 是實係數方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的一根，試求 a, b 的值

- (A) $a = -2, b = 5$ (B) $a = 2, b = -5$ (C) $a = 1, b = 3$ (D) $a = 2, b = 4$

21. 令 a, b 皆為整數，則 “ $a > 0$ 且 $b > 0$ ” 為 “ $a + b > 0$ ” 的

- (A) 必要非充分條件 (B) 充要條件 (C) 充分非必要條件
(D) 以上皆非

22. 令 C 為 1 到 99 的正整數所成的集合. $A = \{x \mid x \in C \text{ 且 } x \text{ 是 } 3 \text{ 的倍數}\}$,

$B = \{x \mid x \in C \text{ 且 } x \text{ 是 } 5 \text{ 的倍數}\}$. 求 $A \cup B$ 的元素的個數

- (A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 50

23. 令 $A(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$ 則 $\frac{dA}{dx} =$

- (A) $\frac{2x}{1+x^2}$ (B) $\frac{1}{1+x^2}$ (C) 0 (D) $2x$

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x} =$

- (A) ∞ (B) 0 (C) -1 (D) 1

25. 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$ 的收斂半徑

- (A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

26. 直線 $L: 3x + y - 9 = 0$ 與圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的關係為

- (A) 相切 (B) 相交於兩點 (C) 不相交 (D) 以上皆非

27. 試求 λ 的值讓下列方程組有非零解
- $$\begin{aligned}\lambda x + 4y + 2z &= 0 \\ 4x + \lambda y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + (\lambda - 3)z &= 0\end{aligned}$$
- (A) $\lambda = 1$ 或 -2 (B) $\lambda = 3$ 或 -4 (C) $\lambda = 5$ (D) $\lambda = 4$ 或 -5
28. 曲線 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ 在點 $(2, 4)$ 的切線斜率為
- (A) 1 (B) $\frac{4}{5}$ (C) $-\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$
29. 求常微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解
- (A) $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ (B) $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ (C) $c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$
(D) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
30. 令 $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}, v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 且 $u \neq 0, v \neq 0$, 則矩陣 uv^T 的秩為
- (A) n (B) 1 (C) 0 (D) 2
31. 試求 b, c 使得矩陣 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i & c \end{pmatrix}$ 為 unitary matrix
- (A) $b = 1, c = -1$ (B) $b = 1, c = 1$ (C) $b = \frac{\sqrt{2}}{2}i, c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D)
 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}i, c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
32. 令 $f(x, y) = y^2 - x^2$, 試求該函數在點 $(1, 2)$ 的最大方向導數
- (A) $2\sqrt{5}$ (B) 20 (C) $\sqrt{5}$ (D) 4
33. 令 $a \neq 0$ 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2}$
- (A) $\frac{1}{2a}$ (B) 0 (C) ∞ (D) 1
34. 令 $f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$, 求 $f_x(0, 1, 2)$
- (A) 1 (B) $1 - \ln 2$ (C) $\ln 2$ (D) $1 + \ln 2$

35. 令 λ 為方矩陣 A 的特徵值，求 $\det(\lambda I - A)$
 (A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2
36. 令 $A \in R^{3 \times 3}$ 且 $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ，求 $P(A)$
 (A) 零矩陣 (B) 單位矩陣 I (C) $2I$ (D) $3I$
37. 在一箱子中有 8 個好的蘋果和 2 個壞的蘋果，今隨機取用其中 2 個。請問這取用的 2 個都是好的機率為多少？
 (A) $\frac{25}{45}$ (B) $\frac{26}{45}$ (C) $\frac{27}{45}$ (D) $\frac{28}{45}$
38. 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \\ 8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$ ，則矩陣 A 的秩(rank)為
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
39. 七年八班教室的號碼鎖的號碼是由 0, 1, 2, 3, 4 等 5 個數字所組成的 4 個數字碼，請問總共有多少種可能的號碼？
 (A) 600 (B) 525 (C) 625 (D) 500
40. 判別方程式 $4x^2 + xy + 6y^2 = 36$ 的圖形
 (A) 雙曲線 (B) 此圖形為空集合 (C) 橢圓 (D) 以上皆非
41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2} - 1$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2} + 1$
42. 令 $F(x) = \int_1^{x^2} \cos t dt$ 求 $F'(x)$
 (A) $\cos x^2$ (B) $2x \sin x^2$ (C) $\sin x^2$ (D) $2x \cos x^2$
43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

(A) ∞ (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

44, $\int_0^1 \sin^{-1} x dx =$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2} - 1$ (C) $\frac{\pi}{2} + 1$ (D) $-\frac{\pi}{2}$

45, $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} dx =$

(A) $\sqrt{41} - 3$ (B) $\sqrt{31}$ (C) $\sqrt{71}$ (D) 8

46, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

47. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

(A) 1 (B) 0 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

48. $\int_0^1 x e^x dx =$

(A) 1 (B) e (C) $e - 1$ (D) $e + 1$

49. 令 $u \in R^n$ 為單位行向量 ($\|u\|_2 = 1$) 且 $I \in R^{n \times n}$ 為單位矩陣，求

$\det(I - 2uu^T)$

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2

50. 令 $u \in R^n$ 為單位行向量 ($\|u\|_2 = 1$)， $n > 1$ 求 $\det(uu^T)$

(A) 1 (B) -1 (C) e (D) 0