

國立彰化高級中學 104 學年度 第一次教師甄選 數學科 答案卷

說明: (A)測驗時間: 120 分鐘

(B)第 1 題到第 13 題，每題 7 分；第 14 題 9 分；滿分 100 分。

答案卷上請標題號，需計算過程(或想法)，否則，斟酌給分。

1.根據

$$(\cos 7\theta + i \sin 7\theta)^1 = (\cos \theta + i \sin \theta)^7 = \sum_{k=0}^n i^{n-k} \binom{7}{k} \cos^k \theta \sin^{n-k} \theta$$

$$\text{所以 } \tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6}, \text{ 其中 } t = \tan \theta,$$

$$\text{又 } \tan 7\theta = 0 \text{ 有 7 個根，恰為 } \frac{k\pi}{7}, k=0,1,2,3,4,5,6,$$

$$\text{所以 } t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0, \text{ 有 6 根，為 } \tan \frac{k\pi}{7}, k=1,2,3,4,5,6,$$

$$\text{根據根與係數，6 根積為 } -7, \text{ 所以 } \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$$

$$2. (1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots, x = \frac{1}{n} \text{ 代入}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 3 \leq n,$$

$$\text{所以 } (n+1)^n < n^{n+1}$$

$$3. \text{令 } a = \sqrt{1648 + x^3}, b = \sqrt{4949 - x^3}, \text{ 所以 } a - b = 75, \text{ 所以 } a^2 + b^2 = 6597, \\ \text{則 } ab = 486, a + b = \sqrt{7569} = 87, \text{ 所以 } a = 81$$

$$x^3 = 4913, x = 17$$

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{5^k C_k^n}{k} = \sum_{k=1}^n 5^k \frac{C_{k+1}^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{5(n+1)} \sum_{k=1}^n 5^{k+1} C_{k+1}^{n+1} \approx \frac{6^{n+1}}{5(n+1)} (\text{略小})$$

$$\text{所以 } \frac{6^{n+1}}{5(n+1)} > 6^{2015} \text{ 相當於 } 6^{n-2014} > 5(n+1), 6^5 < 5(2020),$$

$$\text{而 } 6^6 > 5(2021), \text{ 所以 } n=2020$$

關於詳解疑義，係命題時手誤，經討論不影響最終作答，且已於閱卷前會議討論給分方式。

$$5. f(x) = \int_x^{x^2} \sqrt[3]{-65 + 38t + t^4} dt, \text{ 令 } g(t) = \sqrt[3]{-65 + 38t + t^4},$$

$$\text{則 } f'(x) = g(x^2) \times 2x - g(x), \text{ 代入 } 2, f'(2) = 4g(4) - g(2) = 28 - 3 = 25$$

$$6. \text{ 前 } 6 \text{ 項依序為 } a, b, b-a, -a, -b, a-b, \text{ 依序循環, } 2000 = 6 \times 333 + 2,$$

$$\text{所以 } a + b = 2014, \text{ 又 } 2014 = 6 \times 335 + 4, -a + 2b = 2000,$$

$$a = 676, b = 1338$$

$$\text{又 } 2015 = 6 \times 335 + 5, \text{ 所以想求 } -a + b = 662$$

$$7. \text{ 原題 相當於 } a + \Delta b + \Delta c + \Delta d + \Delta e + h = 25, \text{ 其中 } a \geq 1, \Delta b, \Delta c, \Delta d, \Delta e \text{ 均} \geq 4, \text{ 總數 } H_8^6 = C_8^{13} = 1287$$

$$8. x^3 + 3x - 2 = 0 \text{ 在 } 0 \text{ 與 } 1 \text{ 之間有一個實數解 } x_0, \text{ 試解 } x_0.$$

【解】：

$$\text{設 } x = \alpha + \beta$$

$$\because (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \therefore x^3 - 3\alpha\beta x - (\alpha^3 + \beta^3) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = 2 \\ \alpha\beta = -1 \Rightarrow \alpha^3\beta^3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha^3, \beta^3 \text{ 為 } t^2 - 2t - 1 = 0 \text{ 之兩根 } 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{可設 } \begin{cases} \alpha^3 = 1 + \sqrt{2} \\ \beta^3 = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \\ \beta = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$$

$$9. \text{ 若 } P \text{ 為直角坐標平面上一點, } O \text{ 為原點, 且 } A(2,0), B(0,-2), \overline{OP} = 2,$$

$$(1) \text{ 求 } \overline{PA}^2 \times \overline{PB}^2 \text{ 的最大值.}$$

$$(2) \text{ 若 } P \text{ 點落在 } x \text{ 軸上方, 求 } \overline{PA} + 3\sqrt{2}\overline{PB} \text{ 的最大值.}$$

【解】：

$$(1) \text{ 設 } P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

$$\overline{PA}^2 = (2\cos\theta - 2)^2 + (2\sin\theta)^2 = 4 - 8\cos\theta + 4 = 8(1 - \cos\theta)$$

$$\overline{PB}^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta + 2)^2 = 4 + 8\sin\theta + 4 = 8(1 + \sin\theta)$$

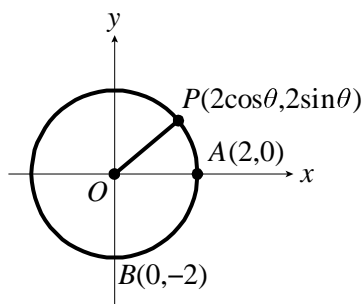
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 \times \overline{PB}^2 &= 64(1 - \cos\theta)(1 + \sin\theta) = 64(1 - \cos\theta + \sin\theta - \cos\theta\sin\theta) \\ &= 64[1 + (\sin\theta - \cos\theta) - \cos\theta\sin\theta]\end{aligned}$$

$$\text{令 } \sin\theta - \cos\theta = t \quad (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

$$\text{平方} \Rightarrow (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1-t^2}{2}$$

$$\overline{PA}^2 \times \overline{PB}^2 = 64(1+t-\frac{1-t^2}{2}) = 32(t+1)^2$$

$$\text{當 } t = \sqrt{2} \text{ 時, 最大值} = 32(\sqrt{2}+1)^2.$$



(2) 設 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $A(2,0)$, $B(0,-2)$

$$\overline{PA} = \sqrt{(2\cos\theta - 2)^2 + (2\sin\theta)^2} = \sqrt{8(1 - \cos\theta)} = \sqrt{8 \times 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 4\sin\frac{\theta}{2}$$

$$(\because 0 < \theta < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} > 0, \cos\frac{\theta}{2} > 0)$$

$$3\sqrt{2}\overline{PB} = 3\sqrt{2}\sqrt{(2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta + 2)^2} = 3\sqrt{2}\sqrt{8(1 + \sin\theta)} = 3\sqrt{2}\sqrt{8(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2}$$

$$= 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \left| \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \right| = 6\left| \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \right|$$

$$\therefore \overline{PA} + 3\sqrt{2}\overline{PB} = 4\sin\frac{\theta}{2} + 12\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) = 4\left(4\sin\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\because 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 4\sin\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2} \leq 5$$

$$\therefore \overline{PA} + 3\sqrt{2}\overline{PB} \text{ 的最大值為 } 4 \times 5 = 20.$$

10. 設 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ，規定 $f_1(x) = f(f(x))$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$, ..., $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $n = 2, 3, 4, \dots$, 求 $f_{2015}(104)$ 。

【解】：

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad f_1(x) = f(f(x)) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1}.$$

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} = 1 + x - 1 = x$$

$\Rightarrow f_3(x) = f(x)$, $f_4(x) = f_1(x)$, $f_5(x) = f_2(x)$, ... $\therefore f_n(x)$ 有一週期性

$\Rightarrow f_{3n}(x) = f(x)$, $f_{3n+1}(x) = f_1(x)$, $f_{3n+2}(x) = f_2(x)$, ... $\therefore f_{2015}(104) = f_2(104) = 104$ 。

11. 三次曲線 $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ ，若由原點可作三條相異的切線，求 a 的範圍為

【解】：

$$\text{設 } f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$$

設切點為 $(c, f(c))$

$$\text{則切線為 } y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$\text{過 } (0, 0) \Rightarrow 0 - f(c) = f'(c)(0 - c)$$

$$\therefore -(c^3 + ac^2 + c + 1) = (3c^2 + 2ac + 1)(-c)$$

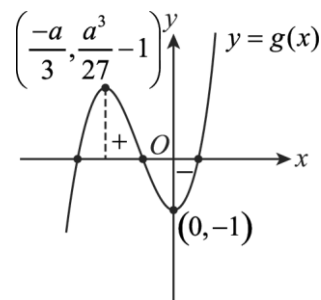
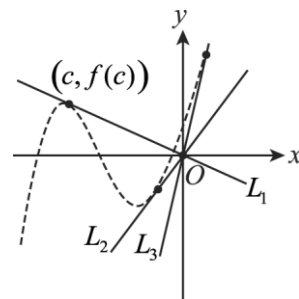
$\therefore 2c^3 + ac^2 - 1 = 0$ 有三相異實根

即 $2x^3 + ax^2 - 1 = 0$ 有三相異實根

$$\text{設 } g(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

$$g'(x) = 6x^2 + 2ax$$

$$\text{令 } g'(x) = 0$$



\therefore 極點在 $x=0$, $-\frac{a}{3}$

欲三相異實根（與 x 軸有三交點）

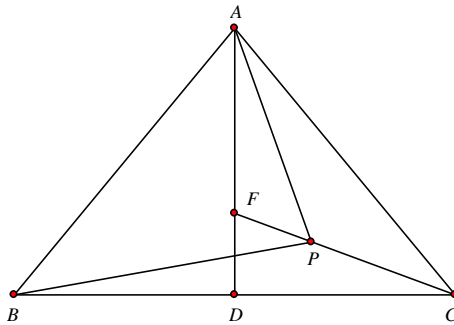
$\therefore g(0) \times g\left(-\frac{a}{3}\right) < 0$ （異號）

$\therefore (-1) \times \left(-\frac{2a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - 1\right) < 0$

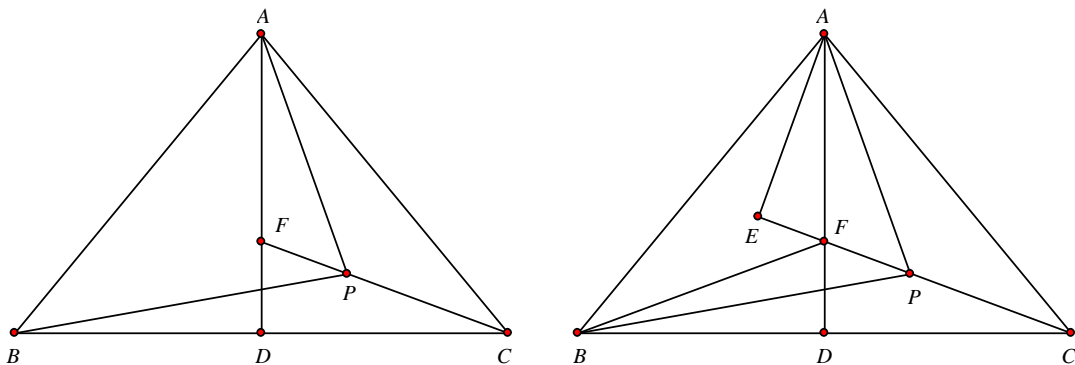
$\therefore \frac{2a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + 1 < 0 \quad \therefore -a^3 + 27 < 0 \quad \therefore a^3 - 27 > 0 \quad \therefore a^3 > 27 \Rightarrow a > 3 .$

12. 設 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。若點 P 是 $\triangle ABC$ 的內部一點，且 $\angle ACP = 30^\circ$ 、
 $\angle PCB = 2\angle PBC$ 。

若直線 CP 與中線 \overline{AD} 交於點 F ，試證： \overline{AP} 是 $\triangle CAF$ 的一內角平分線。



【證明】：



因為 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 \overline{AD} 與 \overline{BC} 垂直，所以， $\overline{FB} = \overline{FC}$ ， $\angle DCF = \angle DBF$ 。

過 A 作直線 CP 的垂直線，設垂足為 E 。在直角三角形 $\triangle AEF$ 與 $\triangle CDF$ 中，因為 $\angle AFE = \angle CFD$ ，

所以， $\angle EAF = \angle DCF$ 。由此可得 $\angle EAF = \angle DBF$ 。於是， $\triangle AEF$ 與 $\triangle BDF$ 相似，

因而得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$ 。

因為 $\angle FBC = \angle PCB = 2\angle PBC$ ，所以， \overrightarrow{BP} 平分 $\angle CBF$ 。

由此得 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}$ 。

在直角三角形 $\triangle ACE$ 中，因為 $\angle ECA = 30^\circ$ ，所以， $\overline{AC} = 2\overline{AE}$ 。

由此得 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{2\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}$ 。

於是， \overrightarrow{AP} 平分 $\angle FAC$ 。

13. 安排 n 個人進入 A, B, C 三間房間， A 房間必須有奇數個人，試問有幾種不同的安排方法？

【解】：

(1) 若 n 為奇數，則進入房間 A 的有可能 $1, 3, 5, \dots, n$ 人，其他再安排入 B, C 房，共有

$$\begin{aligned} C_1^n 2^{n-1} + C_3^n 2^{n-3} + C_5^n 2^{n-5} + \dots + C_n^n 2^0 &= 2^0 C_0^n + 2^2 C_2^n + \dots + 2^{n-1} C_{n-1}^n \\ &= \frac{(1+2)^n + (1-2)^n}{2} = \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

(2) 若 n 為偶數，則進入房間 A 的有可能 $1, 3, 5, \dots, n-1$ 人，共有

$$\begin{aligned} C_1^n 2^{n-1} + C_3^n 2^{n-3} + C_5^n 2^{n-5} + \dots + C_{n-1}^n 2^1 &= 2^1 C_1^n + 2^3 C_3^n + \dots + 2^{n-1} C_{n-1}^n \\ &= \frac{(1+2)^n - (1-2)^n}{2} = \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

因此，不論 n 為奇數或偶數，兩者皆為 $\frac{3^n - 1}{2}$ 種不同的安排方法。

14. 已知 x 為正實數，

(1) 求證：函數 $f(x) = x^{\log 9} + 19$ 為嚴格遞增函數。

(2) 求方程式 $(9^{\log x} + 19)^{\log 9} + 19 = x$ 的解。

【解】：

(1) 若 $x_1 > x_2 > 0$ ，則 $\log x_1 > \log x_2 \Rightarrow \log 9 \cdot \log x_1 > \log 9 \cdot \log x_2 \Rightarrow \log x_1^{\log 9} > \log x_2^{\log 9} \Rightarrow x_1^{\log 9} > x_2^{\log 9}$

$\Rightarrow x_1^{\log 9} + 19 > x_2^{\log 9} + 19 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \therefore$ 函數 $f(x) = x^{\log 9} + 19$ 為嚴格遞增函數。

或利用微分法 $f'(x) = \log 9 x^{\log 9 - 1} > 0 \therefore$ 函數 $f(x) = x^{\log 9} + 19$ 為嚴格遞增函數。

(2) 設方程式 $(9^{\log x} + 19)^{\log 9} + 19 = x$ 的解為 $\alpha \Rightarrow (9^{\log \alpha} + 19)^{\log 9} + 19 = \alpha \Rightarrow f(f(\alpha)) = \alpha$

①若 $f(\alpha) > \alpha$ ，則 $f(f(\alpha)) > f(\alpha) \Rightarrow \alpha > f(\alpha)$ ，矛盾

②若 $f(\alpha) < \alpha$ ，則 $f(f(\alpha)) < f(\alpha) \Rightarrow \alpha < f(\alpha)$ ，矛盾

由①、②可得 $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha^{\log 9} + 19 = \alpha$

令 $\alpha = 10^\beta$ 則 $10^{\beta \log 9} + 19 = 10^\beta \Rightarrow 9^\beta + 19 = 10^\beta \Rightarrow 10^\beta - 9^\beta = 19$

利用勘根定理可得 $\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 10^2 = 100$ 為方程式的唯一正實根。