

教育部受託辦理 104 學年度公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題 20 題及綜合題 2 大題，共計 100 分；選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在答案本上作答。本科不可以使用電子計算器

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題（每題 3 分，共 24 分）

(B) 1. 設 $a_n = \sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \cdots + \sqrt{n(n+1)}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 之值為 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

(B) 2. 試問 $\underbrace{888 \cdots 88}_{\text{共有 } 2015 \text{ 個 } 8}$ 被 13 除的餘數為 (A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 9

(A) 3. 設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{BC} = 2\sqrt{7}$ ， $\angle A$ 的內角平分線交 \overline{BC} 於 D ，

\overline{AB} 邊上的高為 \overline{CH} ，且 \overline{AD} 交 \overline{CH} 於 P ，若 $\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{BA} + \beta \overrightarrow{BC}$ ，則數對 $\alpha + \beta = ?$

(A) $\frac{7}{9}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$

(B) 4. 已知 $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c$ ，若 $f(x) = 0$ 的三根為 α ， β ， γ 且 $f(-1) = 1$ ，則

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix} = ? \quad (A) -3 \quad (B) -5 \quad (C) 2 \quad (D) 5$$

(C) 5. 甲、乙、丙三人共同租一間房間，週一至週六每天抽籤決定一個人打掃，若規定同一個人不可以連著兩天打掃，則每一個人至少排到一天之機率最接近以下何者
(A) 0.9 (B) 0.92 (C) 0.94 (D) 0.96

(D) 6. 一數列 $\{a_n\}$ ，若 $a_1 = 1$ 且 $\forall n \in N$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值為 (A) -3 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$
(D) 3

(C) 7. 小明口袋裡有 2 個白球，大華口袋裡有 3 個紅球，現在兩人自口袋裡隨機取一個球和對方交換，求交換三次後，小明口袋裡有 1 白球 1 紅球的機率為 (A) $\frac{17}{36}$ (B) $\frac{19}{36}$ (C) $\frac{23}{36}$
(D) $\frac{25}{36}$

(D) 8. $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 上一點，設 R_1 、 R_2 、 R_3 分別為 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，若 $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 3$ ，則 $\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AC} = ?$ (A) 1:2:3 (B) 3:1:2 (C) 2:3:6
(D) 3:2:6

二、複選題（每題 4 分，共 16 分）

(BC) 9. 下列有關 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\Gamma_2: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, $\Gamma_3: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的敘述，哪些正確？

- (A) Γ_1 與 Γ_2 貫軸與共軛軸互換。
- (B) Γ_1 與 Γ_2 圖形經過移動或轉動後能夠完全重合。
- (C) Γ_2 與 Γ_3 有共同的焦點。
- (D) Γ_2 與 Γ_3 有共同的漸近線。

(CD) 10. 有一道光線由點 $A(1,1,1)$ 射向平面 $E: x - 2y + z = 3$ ，經平面反射後，通過點 $B(5,3,2)$ ，

若反射光所在的直線方程式為 $\begin{cases} \frac{x-3}{4} = \frac{y+a}{b} \\ z=c \end{cases}$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (A) $a = \frac{5}{3}$
- (B) $b = 3$
- (C) $c = 2$
- (D) $a + b + c = 7$

(ACD) 11. 將一年 16 班十位學生第一次期中考數學、物理的成績分別以 X, Y 表示，成績整理成下表：

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	平均
數學(X)	90	80	50	65	75	50	70	80	60	90	71
物理(Y)	80	70	50	70	65	55	60	75	65	90	68

設數學成績的標準差為 σ_X ，物理成績的標準差為 σ_Y ， X, Y 的相關係數為 r ，物理對於數學的最佳直線為 L ，則下列哪些選項是正確的？

- (A) 只將甲與乙的數學成績互換，則互換之後新的數學成績的標準差亦為 σ_X
- (B) 只將甲與乙的數學成績互換，則互換之後新的數學與物理成績的相關係數亦為 r
- (C) 將每位學生的數學與物理成績互換（即：甲數學變為 80，物理變為 90；乙數學變為 70，物理變為 80；...），則互換之後數學與物理的相關係數亦為 r
- (D) 將每位學生的數學成績加 5 分，則加分後新的『物理對於數學的最佳直線斜率』與 L 的斜率相等

(ABCD) 12. 投擲一均勻的骰子 3 次，出現的點數依次為 a, b, c ，則

- (A) $a < b < c$ 的機率為 $\frac{5}{54}$
- (B) $a \leq b \leq c$ 的機率為 $\frac{7}{27}$
- (C) $a + b + c = 11$ 的機率為 $\frac{1}{8}$
- (D) $(a-b)(b-c) = 0$ 的機率為 $\frac{11}{36}$

第二部分：綜合題（共 60 分）

一、填充題（每題 4 分，共 36 分）

1. 設 $a \in R$ ，若 $a + \log_2 3$ ， $a + \log_4 3$ ， $a + \log_8 3$ 是等比數列，求此等比數列的公比為 $\frac{1}{3}$ 。

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2} = \underline{\frac{\pi}{4}}$ 。

3. 小花閒來無事，畫出一個 29×17 之棋盤。且從第一列開始，從左而右依次填入

1, 2, 3, …, 29; 第二列填入 30, 31, 32, …, 58; 依此類推將 493 個數字依次填入之後，小花又改為從第一行開始由上而下依次填入 1, 2, 3, …, 17; 第二行填入 18, 19, 20, …, 38; 依此類推將 493 個數填完。則在這兩次填入數字的過程中，位置沒有改變的數字之總和為 1235。

4. 正四面體 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 的重心分別為 M 與 N ，已知 $\overline{MN} = 2$ ，四面體 $ABCD$ 的內切球體積為 $\sqrt{6}\pi$ 。

5. O 為坐標平面的原點，若 $\overrightarrow{OP} = (3\cos\alpha + \sin\beta, 2\cos\alpha + 4\sin\beta)$ ， $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ， $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$ ，則所有 P 點所形成的面積為 $\frac{15}{2}$ 。

6. 有一遊戲規則為：袋中有 1 號、2 號、3 號...9 號球各一個，由袋中任抽兩球。若兩球的號碼，在下方的看板上，為同行且相鄰或同列且相鄰，則可以得到格子內金額的獎金；否則沒有獎金，例如：抽到 1 號、6 號則可得到 $1+6=7$ 元，投到 1 號、9 號就得到 0 元，則玩此遊戲乙次所得獎金的期望值為 $\frac{67}{18}$ 。

1	6	2
5	9	7
4	8	3

7. 由 1、2、3、...、20 挑出 x_1, x_2, x_3 三個數，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ；求 x_1 與 x_2 至少差 4， x_2 與 x_3 至少差 5 的機率為 $\frac{143}{570}$ 。

8. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{AC} = 3\sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{21}$ ，由各邊分別向外作正三角形。已知此三個向外所作正三角形的重心會形成一個新的正三角形，求此新正三角形的面積為 $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ 。

9. 設 $x \in \mathbb{R}$ ，求 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ 的最大值為 $\sqrt{10}$ 。

二、計算證明題(每題 8 分，共 24 分；必須詳列出計算過程)

1. (1) 試將 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 因式分解。

(2) 設 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ 由(1)之結果，證明 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 。

(3) 設 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ 且 $a+b+c=18$ ，由(2)之結果，試求出 $(a+1)(b+2)(c+3)$ 之最小值及此時之 a, b, c 之值。

2. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AB}$ ， $\angle B = 54^\circ$ ，則 $\angle C = ?$

3. 若 x, y, z 都是正數且滿足 $x + \frac{1}{y} = 4$ ， $y + \frac{1}{z} = 1$ ， $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$ ，求 xyz 的值？