

國中數學科試題

單一選擇題（共 50 題，每題 2 分，共 100 分）

- 求 $(1+i)^8 = ?$
① 16 ② 8 ③ 1 ④ 2
- 令 a, b 為 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特徵值, 求 $ab = ?$
① 5 ② 4 ③ 2 ④ 6
- 下列何者為 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 11 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$ 的特徵值 ?
① 8 ② 11 ③ 7 ④ 5
- 令 $U = \{(a, b, c, d, e) \in R^5 \mid a = b = c, \text{ 且 } e = 6d\}$, 求 $\dim(U) = ?$
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5
- 求 $\iint_R (x+y) dA$, 其中 R 為一三角形, 其三頂點分別為 $(0,0), (0,1), (1,1)$
① 1 ② $\frac{1}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$
- 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$ 的收斂半徑 = ?
① e ② $2e$ ③ 1 ④ $\frac{1}{e}$
- 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 4x)(\sin 3x)}{x(\sin 2x)} = ?$
① 6 ② 12 ③ 2 ④ 8
- 找出一實數 c 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$
① $\ln 3$ ② -1 ③ $\ln 2$ ④ e
- 求 $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = ?$
① ∞ ② $-\infty$ ③ π ④ 2
- 求曲線 $x^2 + 4xy + y^2 = 13$ 在點 $(2,1)$ 的切線方程式
① $y = -4x + 9$ ② $y = 3x - 5$ ③ $y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$ ④ $y = \frac{1}{2}x$
- 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(1+x) - \frac{\pi}{4}}{x} = ?$
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ -1 ④ 不存在
- 求 a, b 使得函數 $f(x) = \begin{cases} ax+b & x > 2 \\ x^3 - 5x^2 + 12 & x \leq 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 可微 (differentiable at $x=2$)
① $a = -8, b = 4$ ② $a = 2, b = 3$ ③ $a = -8, b = 1$ ④ $a = -8, b = 16$
- 下列敘述何者為真 ?
① 若 A, B 為 R^2 的子空間, 則 $A \cap B$ 也是 R^2 的子空間 ② 若 A, B 為 R^2 的子空間, 則 $A \cup B$ 也是 R^2 的子空間 ③ $\text{rank}(A+B)$ 小於 $\text{rank}(A)$ 或 $\text{rank}(B)$ ④ 以上皆非
- 令 $A \in R^{n \times n}$ 且 $A \neq 0, A^4 = 0$, 求 $I + A$ 的反矩陣 = ?
① $I + A + A^2 + A^3$ ② $I - A + A^2 - A^3$ ③ $I + A - A^2$ ④ $I + A^3 + A^4$
- 令 $f(x) = 10^x$, 求 $f'(x) = ?$
① 10^x ② $x10^x$ ③ 9^x ④ $(\ln 10)10^x$
- 若 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 求 $f'(0) = ?$
① 1 ② 0 ③ e ④ e^{x^2}

17. 在 xy 平面上, 方程式 $x^2 - 3y^2 + 4x + 5y - 6 = 0$ 之圖形為

- ① 橢圓 ② 圓 ③ 雙曲線 ④ 兩條直線

18. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} (1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}) = ?$

- ① $\frac{1}{2}$ ② π ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1

19. 令 $f(x, y, z) = xe^{yz} + ye^{xz} - y^2 + 3$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h, 2, 0) - f(-1, 2, 0)}{h} = ?$

- ① 1 ② 0 ③ -1 ④ 3

20. 求以 $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ 與 $(1, 0, 1)$ 為三頂點的三角形之面積 $= ?$

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$

21. 在平面上, 由 $4y = x^2$ 與 $x - 4y + 2 = 0$ 二圖形所圍區域之面積 $= ?$

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{3}{8}$

22. $\int_0^1 xe^x dx = ?$

- ① e ② $e - 1$ ③ $e + 1$ ④ 1

23. 試求 $M = 4x + y$ 的最小值, 其中 x, y 的限制條件如下

$$3x + y \geq 6$$

$$4x + y \geq 12$$

$$x \geq 2$$

$$y \geq 0$$

- ① 12 ② 11 ③ 10 ④ 9

24. 解不等式 $\log_5(x-1) > \log_{25}(x+3) - \frac{1}{2}$

- ① $x > 3$ ② $x > 4$ ③ $x > 2$ ④ $x > 5$

25. 設 $g(x) = ax^3 + \tan^{-1} x$, 其中 a 為常數, 已知 $g(2) = 20$, 試求 $g(-2)$ 之值 $= ?$

- ① -20 ② 10 ③ 30 ④ 20

26. 求拋物線 $y = 1 - x^2$ 與 x 軸所圍成區域的面積 $= ?$

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2

27. 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 求 $1 + \omega + \omega^2 = ?$

- ① i ② $3i$ ③ 0 ④ $-i$

28. 令 a, b 的最大公因數 $(a, b) = 1$, 求 $(a+b, a-b)$ 的值 $= ?$

- ① 1 ② 1或2 ③ 2 ④ 3

29. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, 則 $\text{rank}(A^T) = ?$

- ① 2 ② 1 ③ 3 ④ 4

30. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 且其特徵多項式為 $p(t) = t^2 - 3t - 4$, 試求 $A^2 - 3A - 4I_2 = ?$

- ① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

31. 令 R 為被限制(bounded)在 $y=x^2$ 、 $y=0$ 和 $x=1$ 中的區域(region), 試求 R 關於 $x=-1$ 旋轉的旋轉體體積。

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{5}$ ③ $\frac{13\pi}{15}$ ④ $\frac{7\pi}{6}$

32. 令 $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1} dt$, 則 $F'(x)$ 為下列何者?

- ① $\sqrt{x^2 + 1}$ ② $\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1}$ ③ $-2\sqrt{4x^2 + 1} + 2x\sqrt{x^4 + 1}$ ④ $-2\sqrt{4x^2 + 1} + x\sqrt{x^4 + 1}$

33. 下列各函數的馬可勞林級數(Maclaurin series), 何者不正確?

- ① $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ ② $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ ③ $\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ ④ $\ln(1+x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$

34. 請計算極限值 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{\log(1+x^2)} = ?$

- ① $-\infty$ ② -1 ③ 1 ④ ∞

35. 下列哪一個不等式不成立？

- ① $\sin^2 x \leq 2|x|$ for all $x \in \mathbb{R}$ ② $e^x \leq 7(x-1)$ for all $x \in \mathbb{R}$ ③ $\sqrt{1+2x} \leq 1+x$ for all $x > 0$ ④ $\log x \leq -1+x$ for all $x \geq 2$

36. 設 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，定義 $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^3$ ， A 為下列何者時， T 不為可逆線性變換(invertible linear transformation)？

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ② $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ④ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

37. 下列何者不是從 \mathbb{R}^3 映到 \mathbb{R}^3 的線性變換(linear transformation)？

- ① $T(x,y,z) = (x, x+y+z)$ ② $T(x,y,z) = (3x-4y, 2x-5z)$ ③ $T(x,y,z) = (1,1)$ ④ $T(x,y,z) = (0,0)$

38. 下列何組向量不能生成 \mathbb{R}^3 ？

- ① $(-3,0,4), (5,-1,2), (1,1,3)$ ② $(0,0,3), (2,2,2), (0,1,1)$ ③ $(1,4,-1), (2,-3,5), (3,1,4), (5,-2,9)$ ④ $(1,0,1), (2,2,0), (3,3,3)$

39. 設 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是向量空間 V (vector space) 中一組基底(basis)， T 為 V 中的任何一個子集(subset)，則下列敘述何者不正確？

- ① 對於任一向量 $v \in V$ ，存在唯一的一組純量 $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ 使得 $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$
 ② 若 T 的元素個數少於 n 個，則 T 必是線性相依的(linearly dependent)
 ③ S 是線性獨立的
 ④ 因為 S 含有 n 個向量，所以 V 中的每一個基底皆含有 n 個向量。

40. 令 x_n 為序列(sequence)， n 是自然數，下列何者的極限最大上界(limit supremum)不存在，也就是說其極限最大上界為無窮大(∞)？

- ① $x_n = \frac{y_n}{n}$, where $\{y_n\}$ is any bounded sequence ② $x_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{5n+3}$ ③ $x_n = (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$ ④ $x_n = n(1+(-1)^n) + n^{-1}((-1)^n - 1)$

41. 設 A 是一個 $m \times n$ 階矩陣， $Ax = b$ 是一個非齊次系統(non-homogeneous system)，則下列敘述何者有誤？

- ① 若 $m=n$ 且 $Ax = b$ 有唯一解，則解為 $x = bA^{-1}$ ② 若 $m=n$ 且 $Ax = b$ 有唯一解，則 A 必可逆(invertible)
 ③ 若 $Ax = b$ 有解，則 A 與增廣矩陣(augmented matrix) $[A|b]$ 有相同的秩(rank)
 ④ 若 A 與增廣矩陣(augmented matrix) $[A|b]$ 有相同的秩(rank)，則 $Ax = b$ 有解

42. 下列何者是微分方程式 $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(\frac{\pi}{4}) = 2, y'(\frac{\pi}{4}) = -2 \end{cases}$ 的解？(其中 e 為自然常數)

- ① $y(t) = -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+t} \cos t + \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}+t} \sin t$ ② $y(t) = -\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}+t} \cos t - \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+t} \sin t$ ③ $y(t) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-t} \cos t + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-t} \sin t$ ④ $y(t) = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}-t} \cos t - \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-t} \sin t$

43. 若 $y(t) = k_1 \cos(at) + k_2 \sin(bt)$ 為微分方程式 $4y'' + 9y = 0$ 的一般解，其中 k_1 和 k_2 是常數，則 $(a+b)$ 為多少？

- ① $-\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{9}{4}$ ④ 3

44. 令 $n > 1$ ， z_1, z_2, \dots, z_n 為 $x^n = i$ 的 n 個根，求 $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ 的值 = ？

- ① 1 ② 0 ③ π ④ 2π

45. 令 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\left| \frac{1+2i}{-2-i} \right| + \left| \frac{(\pi+i)^{100}}{(\pi-i)^{100}} \right|$ 為多少？

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2-1}$ ④ 2

46. 令 $i = \sqrt{-1}$ ， e 為自然常數，則 $(1+i)^6$ 與下列何者相等？

- ① $6e^{\frac{\pi}{3}i}$ ② $8e^{\frac{3\pi}{2}i}$ ③ $2e^{\frac{\pi}{2}i}$ ④ -1

47. 在複數域中，令 $i = \sqrt{-1}$ ， z 是複數(complex number)，考慮下列集合：(A) $|z+2-i| \leq 1$ (B) $|\operatorname{Arg} z| < \frac{2\pi}{3}$ (C) $0 < |z-3| < 5$
 (D) $-2 < \operatorname{Im} z \leq 2$ ，在這些集合中，有哪些集合是有界的(bounded)？

- ① (A)(C) ② (B)(D) ③ (A)(B)(C) ④ (A)(B)(C)(D)

48. 設 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 。若 $A = PBP^{-1}$ ，試求 $B^6 = ?$

- ① $B^6 = \begin{pmatrix} 2^6 & 1 \\ 1 & 3^6 \end{pmatrix}$ ② $B^6 = \begin{pmatrix} 2^6 & 1 \\ 0 & 4^6 \end{pmatrix}$ ③ $B^6 = \begin{pmatrix} 5^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix}$ ④ $B^6 = \begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix}$

49. 令 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\int_0^2 \frac{t}{(t^2+i)^2} dt = ?$

- ① $\frac{1}{1+i}$ ② $\frac{1}{1+2i} - \frac{1}{1-i}$ ③ $\frac{1}{2i} - \frac{1}{8+2i}$ ④ $\frac{1}{i} - \frac{1}{1+2i}$

50. 河內塔(Tower of Hanoi)遊戲的規則如下：在一塊平放的木板上插上三根垂直於木板的長木釘，在其中一根木釘上，從下至上被套入了 64 片直徑由大至小的圓環形金屬片，規定在每次的移動中，只能搬移一片金屬片，並且在過程中必須保持金屬片由下至上是直徑由大至小的次序，也就是說不論在那一根木釘上，較小片的金屬片都在較大片金屬片的上方。若要將 64 片的金屬片依規則從指定的木釘上全部移動至另一根木釘上，則最少需要搬移多少次？

- ① 3^{64} 次 ② $3^{64}+1$ 次 ③ 2^{64} 次 ④ $2^{64}-1$ 次