

國立嘉義女子高級中學 104 學年度第一次教師甄試【數學科】 初試(筆試)試題卷

時間：104/6/14(日) 10:30~12:00 計 90 分鐘。

說明：1.本試題卷共有 2 張 2 頁 計有 17 題。

2.可利用試題卷空白處書寫或計算。

3.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

一、填充題(每題 5 分，合計 70 分。所有答案均要化至最簡，否則不予計分。)

1. 已知 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 且滿足 $\begin{cases} x+2y \leq 5 \\ y \geq x^2-3x+2 \end{cases}$, 則 $z = x^2 - 6x + y^2 - 8y$ 的最小值為_____。
2. 已知數列 $\{a_n\}$ 的一般項 $a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 22^\circ} + \frac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 23^\circ} \right)^n$, $n \in N$, 則 $a_{20} =$ _____。
3. 設正數 x, y, z 滿足方程組 $\begin{cases} x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 = 25 \\ \frac{1}{3}y^2 + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$, 則 $xy + 2yz + 3zx =$ _____。
4. 設多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 為常數) 滿足 $f(1) = 1993$ 、 $f(2) = 3986$ 、 $f(3) = 5979$, 則 $\frac{1}{4}(f(11) + f(-7)) =$ _____。
5. 設 $a > b > c > 1$, 則 $\log \frac{a}{c} (\log_{\frac{a}{b}} 10 + \log_{\frac{b}{c}} 10)$ 的最小值為_____。
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k} =$ _____。
7. 設 S 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 與平面 $z = 4$ 所圍之立體, 則 S 的體積 $V_S =$ _____。
8. 設複數 z 在複數平面上的對應點為單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上的動點, 令 $\omega = \frac{1}{(1+z)^2}$, 則 ω 在複數平面上的對應點的軌跡方程式為_____。
9. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ 。若 $b_n = \frac{1}{1+a_n}$ 且 $S_n = \sum_{i=1}^n b_i$ 、 $P_n = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$, 則 $P_n + \frac{1}{2}S_n =$ _____。
10. 設 $p(x)$ 為一個實係數 n 次多項式。若 $(k+1)p(k) - k = 0$ 對 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 皆成立, 則 $p(n+1) =$ _____。
11. 已知函數 $f(x) = x^4 - 2x^2$, 若以 $y = f(x)$ 上一點 $(a, f(a))$ 為切點的切線 L_a 與 $y = f(x)$ 恰有三個交點, 則實數 a 的範圍為_____。
12. 將 1 枚硬幣連續投擲 n 次。隨機變數 X 的定義為「若在投擲第 k 次時首次出現正面, 則 $X = k$ 。如果在 n 次的投擲中, 正面一次都沒出現, 則 $X = n$ 」。假設每次投擲硬幣時, 出現正面的機率都是 p ($0 < p < 1$), 則隨機變數 X 的期望值 $E(X)$ 為_____。(請以 n, p 表示)
13. 若 $f(x) = x^2 - x + b$, 且 $f(\log_2 a) = b$, $\log_2(f(a)) = 2$, $a \neq 1$, 則滿足 $f(\log_2 x) > f(1)$ 且 $\log_2(f(x)) < f(1)$ 的 x 的範圍為_____。
14. 實數 x, y 滿足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$, 若 $s = x^2 + y^2$, 則 s 的最大值與最小值的和為_____。

二、計算證明題(每題 10 分，共 30 分)

1. 已知橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 與雙曲線 $\Gamma_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ 有共同的焦點 F_1, F_2 ，設 P 是 Γ_1, Γ_2 的一個交點。試證： $\triangle F_1PF_2$ 的面積 $S_{\triangle F_1PF_2} = bn$ 。
2. 設 $f(x)$ 為 x 的三次實係數多項式且 $f(x)$ 被其導函數 $f'(x)$ 除的餘式是常數。試證： $y = f(x)$ 的函數圖形與 x 軸的交點個數只有一個。
3. $\triangle ABC$ 中，若 a, b, c 為其三邊長。試證： $\frac{s^2}{4} < ab + bc + ca - \frac{2}{s}abc \leq \frac{7}{27}s^2$ ，其中 $s = a + b + c$ 。