國立關西高中104學年度數學科教師甄試筆試試題

(1) 關西高中舉辦校慶紀念品設計比賽，參賽作品有四件，由10位評審進行不記名投票，規定每人投兩票，且兩票必須投不同作品。在沒有廢票的情況下(每位評審皆遵守規定)，只有一件作品得票數最高的票數分布情形有______種。(7分)

(2) 求和：$[\frac{1}{3}]+[\frac{2}{3}]+[\frac{2^2}{3}]+\cdots+[\frac{2^{100}}{3}]=$？ 其中 $[\ x\ ]$ 為高斯函數。(7分)

(3) 若$10^{0.301}=2, 10^{0.4771}=3$，則$10^{-0.0512}=$？ (7分)

(4) ΔABC中，$\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$且 $2\cos\alpha=\alpha, 2\sin\beta=\beta$，則$\angle A, \angle B, \angle C$ 三角的大小關係為？ (7分)

(5) 設△ABC中$\angle C$為直角，點D在斜邊$\overline{AB}$上，$\overline{AC}=9, \overline{BC}=8, \overline{CD}=6$。已知△ACD之內切圓與△BCD之內切圓有相同的半徑，試求△ACD與△BCD面積之比值。(7分)

(6) 平面E方程式為x+y+z=1，設L為平面E與xy平面的相交直線，假設平面 E以L為軸旋轉θ角後通過點 $(1, 1, -2)$，求$\cos\theta=$ ？ (7分)

(7) 直角坐標平面上，設P為拋物線$x^2=4y+4$的頂點，$\overline{AB}$為此拋物線上不過P的弦，若$\angle APB=90°$，則$\triangle APB$之最小面積為________。(7分)

(8) 公司因機械故障而停飛，致使平安旅行社原來預定搭此航空公司班機返台的 25 位旅客，被迫滯留在當地。領隊經詢問後得知，另外三家航空公司飛往 台灣近期的機位已滿，都必須等待，當時有三種方案可以將旅客送回台灣如下 表（表中的數據是以每人為單位）。例如 A 方案，旅行社必須負擔每人 4500 元 的食宿費加上 400 元的轉機價差。

方案	食宿費	轉機價差	返台所需等待時間
A 轉搭甲航空公司的班機	4500 元	400 元	3 天
B 轉搭乙航空公司的班機	5500 元	200 元	4 天
C 轉搭丙航空公司的班機	8000 元	0 元	6 天

註：轉機價差是指「轉搭其他航空公司的班機」所需補的票價差額。

領隊向旅行社報告後，旅行社同意領隊可以使用下列經費來解決此事件：食宿費總共最多 150000 元，轉搭其他航空公司班機的轉機價差總共最多 8000 元 。 試問在經費允許的條件下，要如何分配採用 A、 B、 C 這三種方案的人數，才能 使全部旅客返回台灣所用的等待總人天數最少？所謂等待總人天數是採用各方案的人數乘以等待的 天數之總和，例 如：若採用 A、 B、C 方案的人數分別為 8、 10、 7 人，則等待總人天數為 $8\times3+10\times4+7\times6=106$ （人天）。如果領隊規劃 x 人轉搭甲航空公司的班機、 y 人轉搭乙航空公司的班機，其餘的旅客轉搭丙航空公司的班機，由下列步驟，求出全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。

(1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。(3 分)

(2) 求可行解區域的所有頂點的坐標。(3 分)

(3) 求全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。(2 分)

(9) $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，求$1\cdot\omega\cdot\omega^2\cdot\ldots\cdot\omega^{n-1}=?$

解 1：$1\cdot\omega\cdot\omega^2\cdot\ldots\cdot\omega^{n-1}=\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^{\frac{n(n-1)}{2}}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{n-1}=\begin{cases}1,\text{當}n\text{爲奇數時}\\-1,\text{當}n\text{爲偶數時}\end{cases}$

解 2：$1\cdot\omega\cdot\omega^2\cdot\ldots\cdot\omega^{n-1}=\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}=(\omega^n)^{\frac{n-1}{2}}=1^{\frac{n-1}{2}}=1$

請指出解 1，解 2 何者錯誤？理由何在？ (8 分)

(10) 試證明$\forall a\in N$，則存在$b,c\in N$，使得a^2,b^2,c^2成等差數列。(10 分)

(11) 試證$\cos\frac{\pi}{2015}+\cos\frac{3\pi}{2015}+\cdots\cdots+\cos\frac{2013\pi}{2015}=\frac{1}{2}$ (10 分)

(12) 寫出下列公式、原理或解釋名詞

(a) 整係數多項式之一次因式檢驗法 (3 分)

(b) 首數、尾數 (3 分)

(c) 標準差 (3 分)

(d) 中間值定理 (3 分)

(e) 費瑪點 (3 分)