

## 數學科試題

一、計算題(共 8 題，每題 9 分)。本試卷共有 2 頁。

1. 將與 105 互質之所有正整數由小到大排成一數列，求此數列第 1000 項之值。

2. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$

3. 平面上有一四邊形  $ABCD$ ，其頂點分別為  $A(0,0)$ ， $B(2,1)$ ， $C(3,4)$ ， $D(-1,7)$ ，此平面上另

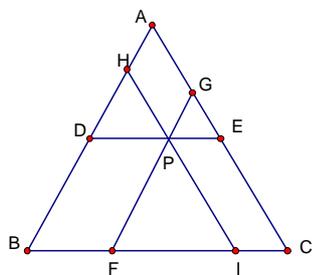
$P, Q$  兩點，使得  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$  與  $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD}$  均有最小值，試求  $P, Q$  座標。

4. 設有  $n$  個正立方體，邊長分別為  $1, 2, \dots, n$  公分，現在將它們由下而上堆疊起來，可隨機以任意大小順序堆疊，但是若連續堆疊的兩個立方體，在上面的立方體邊長超過位在下面立方體邊長 2 公分，則此堆疊方式將會傾倒（例如：若由下而上是②①③④則可安全堆疊，但①④②③則否），問能安全堆疊的機率為何？

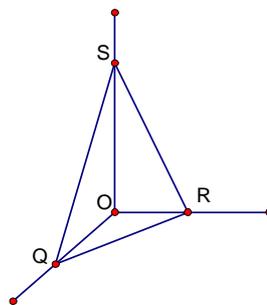
5. 已知  $x, y, z$  均為實數，且  $\begin{cases} 2^x + 3^y + 5^z = 7 \\ 2^{x-1} + 3^y + 5^{z+1} = 11 \end{cases}$ ，若  $t = 2^{x+1} + 3^y + 5^{z-1}$ ，試求  $t$  的範圍。

6. 設圓半徑為 1，今將中心角為  $\theta$  的扇形剪去，剩下其餘部份作成一圓錐容器，當  $\theta$  為  $\theta_0$  時，容器最大體積為  $M$ ，求  $M, \theta_0$  分別為何？

7.  $\triangle ABC$  為邊長是 1 的正三角形， $P$  為三角形內部任意一點，過  $P$  作  $\overline{DE}$  平行  $\overline{BC}$ ， $\overline{FG}$  平行  $\overline{AB}$ ， $\overline{HI}$  平行  $\overline{AC}$  (如圖 (一))；在空間坐標系上，取  $\overline{OQ} = \overline{PD}$ ， $\overline{OR} = \overline{PE}$ ， $\overline{OS} = \overline{FI}$  (如圖 (二)) 求  $\triangle QRS$  的周長最小值為何？



(圖一)



(圖二)

8. 設整係數多項式  $A(x)$  除以  $x^2 + 1$ ，餘式為  $px + q$ ，若  $f(A(x)) = pi + q$  恆成立(其中  $i$  為虛數

單位), 求  $\frac{f(x^{10} + x + 1)}{f(x^5 + x + 1)}$  的值?

二、證明題(共 3 題, 1~2 題每題 9 分, 第 3 題 10 分):

1. 證明:  $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$

2. 給定空間中四面體  $OABC$ , 其中三邊  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  兩兩互相垂直, 若  $a\Delta ABC$ ,

$a\Delta OAB, a\Delta OBC, a\Delta OAC$  分別代表  $\Delta ABC, \Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OAC$  的面積, 試證:

$$(a\Delta ABC)^2 = (a\Delta OAB)^2 + (a\Delta OBC)^2 + (a\Delta OAC)^2$$

3.  $a, b, c \in N$ , 若  $a, b, c$  為偶數的機率均為  $p$ ,  $ab + c$  為奇數的機率是  $f(p)$ , 試証當  $f(p) > \frac{1}{2}$

時  $p$  的範圍在  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < p < \frac{1}{2}$