

數學科試題

一、計算題(共 8 題，每題 9 分)。本試卷共有 2 頁。

1. 將與 105 互質之所有正整數由小到大排成一數列，求此數列第 1000 項之值。

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$

3. 平面上有一四邊形 $ABCD$ ，其頂點分別為 $A(0,0)$ ， $B(2,1)$ ， $C(3,4)$ ， $D(-1,7)$ ，此平面上另

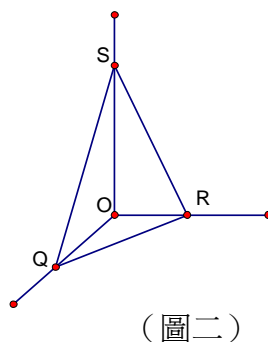
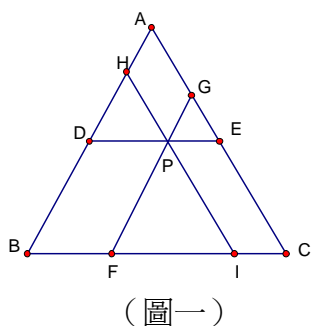
P, Q 兩點，使得 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 與 $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD}$ 均有最小值，試求 P, Q 座標。

4. 設有 n 個正立方體，邊長分別為 $1, 2, \dots, n$ 公分，現在將它們由下而上堆疊起來，可隨機以任意大小順序堆疊，但是若連續堆疊的兩個立方體，在上面的立方體邊長超過位在下面立方體邊長 2 公分，則此堆疊方式將會傾倒（例如：若由下而上是②①③④則可安全堆疊，但①④②③則否），問能安全堆疊的機率為何？

5. 已知 x, y, z 均為實數，且 $\begin{cases} 2^x + 3^y + 5^z = 7 \\ 2^{x-1} + 3^y + 5^{z+1} = 11 \end{cases}$ ，若 $t = 2^{x+1} + 3^y + 5^{z-1}$ ，試求 t 的範圍。

6. 設圓半徑為 1，今將中心角為 θ 的扇形剪去，剩下其餘部份作成一圓錐容器，當 θ 為 θ_0 時，容器最大體積為 M ，求 M, θ_0 分別為何？

7. $\triangle ABC$ 為邊長是 1 的正三角形， P 為三角形內部任意一點，過 P 作 \overline{DE} 平行 \overline{BC} ， \overline{FG} 平行 \overline{AB} ， \overline{HI} 平行 \overline{AC} (如圖 (一))；在空間坐標系上，取 $\overline{OQ} = \overline{PD}$ ， $\overline{OR} = \overline{PE}$ ， $\overline{OS} = \overline{FI}$ (如圖 (二)) 求 $\triangle QRS$ 的周長最小值為何？



8. 設整係數多項式 $A(x)$ 除以 $x^2 + 1$ ，餘式為 $px + q$ ，若 $f(A(x)) = pi + q$ 恆成立(其中 i 為虛數

單位)，求 $\frac{f(x^{10} + x + 1)}{f(x^5 + x + 1)}$ 的值？

二、證明題(共 3 題，1~2 題每題 9 分，第 3 題 10 分)：

1. 證明： $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$

2. 給定空間中四面體 $OABC$ ，其中三邊 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 兩兩互相垂直，若 $a\Delta ABC$,

$a\Delta OAB$, $a\Delta OBC$, $a\Delta OAC$ 分別代表 ΔABC , ΔOAB , ΔOBC , ΔOAC 的面積，試證：

$$(a\Delta ABC)^2 = (a\Delta OAB)^2 + (a\Delta OBC)^2 + (a\Delta OAC)^2$$

3. $a, b, c \in N$ ，若 a, b, c 為偶數的機率均為 p ， $ab + c$ 為奇數的機率是 $f(p)$ ，試証當 $f(p) > \frac{1}{2}$

時 p 的範圍在 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < p < \frac{1}{2}$