# 國立臺南女子高級中學 105 學年度第 1 次教師甄選
# 數學科筆試答案卷

一、填充題：每題 5 分，共 70 分

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $5\cdot 2^{98}-2$ | 5 | 1 | 136 | $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\frac{99}{298}$ | 甲：台中<br>乙：高雄<br>丙：台北<br>丁：台南 | 5 | $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | 16 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | |
| $25x+y=50$ | 20或$-7$ | 5 | $(-\frac{5}{2},3,\frac{11}{2})$ | |

二、計算證明題：共 30 分

1.(6 分)由數學歸納法

(1) $n=1$時，$1\cdot 1!=2!-1$

(2) 設$n=m$時，$\sum_{k=1}^{m} k\cdot k!=(m+1)!-1$，

則$n=m+1$時，

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\cdot k!=\sum_{k=1}^{m+1} k\cdot k!+(m+1)\cdot(m+1)!$$
$$=(m+1)!-1+(m+1)\cdot(m+1)!=(m+2)!-1，$$

由數學歸納法得証

2. (8 分)由 Lagrange 插值公式知

$$f(x)=f(14)\cdot\frac{(x\text{-}11)(x\text{-}12)}{3\cdot 2}+f(12)\cdot\frac{(x\text{-}11)(x\text{-}14)}{1\cdot(-2)}+f(11)\cdot\frac{(x\text{-}12)(x\text{-}14)}{3}$$

代入$x=15$, 得

$$f(15)=2f(14)+(-2)f(12)+f(11)$$

因此，$a+b+c=1$。

3. (8分)設d = (a, b–1), 且 a = dm，b – 1 = dn, 則 $\frac{b-1}{a}=\frac{n}{m}$ ，$\frac{n}{m}$是最簡分數。

依題意m + n = a + b – 78 $\Rightarrow$ m + n = dm + (dn + 1) – 78$\Rightarrow$ (d – 1)(m + n) = 77

$\Rightarrow$ d – 1 = 1或7或11或77 $\Rightarrow$ d = 2或8或12或78

若$d=2$, 則 $m+n=77 \Rightarrow a+b=m+n=78>100$, 不合

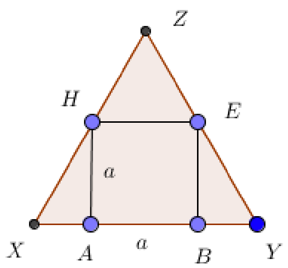
若$d=8$, 則 $m+n=11 \Rightarrow a+b=m+n+78=89$

若$d=12$,則 $m+n=7 \Rightarrow a+b=m+n+78=85$

若$d=78$, 則 $m+n=1$, 不合

因此 $d=8$ 或 $12$。

4. (8分)平面ABEH平行正四面體PQRS的底面QRS，且截此正四體於正三角形 XYZ




而ABEH為此正三角形之內接正方形，$\Delta HXA, \Delta EYB$皆為$30° - 60° - 90°$三角形，故$\overline{XY} = (1+\frac{2}{\sqrt{3}})a$

若記正四面體PQRS的高為 $h=\sqrt{\frac{8}{3}}$ ，由相似形比例知

$$(h-a):h = \overline{PX}:\overline{PR} = \overline{XY}:\overline{RS} = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)a:2$$

$$\frac{h-a}{h} = \frac{(1+\frac{2}{\sqrt{3}})a}{2}$$

$$\Rightarrow (1+\frac{2}{\sqrt{3}})ha = 2h-2a$$

$$(2+(1+\frac{2}{\sqrt{3}})h)a = 2h$$

化簡可得 $a=\dfrac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$