國立臺南女子高級中學 105 學年度第 1 次教師甄選
數學科筆試試題卷

一、填充題：每題 5 分，共 70 分

1. n 為自然數，若 $a_1=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=2(a_n+1)$，求數列 $<a_n>$ 的第 100 項 $a_{100}=$ ＿＿＿＿＿＿。

2. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=9, \overline{AC}=5, \cos\angle BAC=\dfrac{1}{6}$。設點 P、Q 分別在邊 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 上，並使得 ΔAPQ 的面積是 ΔABC 面積的 $\dfrac{1}{3}$，則 $\overline{PQ}$ 的最小可能值為＿＿＿＿＿。

3. z 是一個複數，且 $|z-i|=1,\ i=\sqrt{-1}$, 則 $(3+4i)z$ 實部的最大值為＿＿＿＿＿＿。

4. 紅、藍、綠、白四種顏色塗在下面的四個格子中，一個格子塗一種顏色，而每個顏色可重複使用，但翻轉相同視為同一種塗法(即紅、藍、綠、白與白、綠、藍、紅視為同一種)。則總共有＿＿＿＿＿＿種不同的塗法。

5. 空間中三非零向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ $\angle AOB=30°, \angle BOC=45°, \angle COA=60°$, 令 θ 為平面 AOB 及平面 BOC 的法向量夾角，則 $|\cos\theta|=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

6. 已知在一個社區內得到特定疾病之機率為 0.005。現在有一種新的篩檢該疾病之方式，該篩檢方式之統計結果如下：在一個已知得該疾病之病人身上，該檢測成功得出陽性(positive)結果之機率為 0.99。另一方面，對於一個確定未感染該疾病的人，該檢測可以正確得出陰性(negative)結果之機率也是 0.99。換句話說，該檢測正確分類出一個已知結果之病例，機率高達 99%。試計算一個被驗為陽性病人，真正患病機率為＿＿＿＿＿＿。

7. 一次會議中，甲、乙、丙、丁四個代表來自台北、台中、台南、高雄四個城市(不一定按此順序)，他們彼此之間不知道誰來自何處。甲認為丁來自台北，乙認為丙來自台中，丙認為甲不可能來自台南，丁認為乙來自高雄。實際情況是，來自台北、台南的兩個代表猜測正確，另外兩個代表猜測錯誤，請問甲、乙、丙、丁四個代表分別來自何處？______________________________。

8.. $f\left(n\right)=\dfrac{6^n+8^n}{5}$，則以下函數值為整數的有幾個？___________

$f\left(8\right)$、$f\left(18\right)$、$f\left(28\right)$、$f\left(38\right)$、$f\left(48\right)$、$f\left(58\right)$、$f\left(68\right)$、$f\left(78\right)$、$f\left(88\right)$、$f\left(98\right)$

9. a_n 為 $\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\dfrac{3}{n},...,\dfrac{n}{n}$ 這 n 個數的標準差，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值____________

10. $\left(x+\sqrt{3}\right)^{21}+\left(1-x\right)^{32}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{32}x^{32}$，若 $a_0-a_2+a_4-a_6+....+a_{32}=2^k$，

求 $k=$ __________

11. $f\left(x\right)=\int_2^x\left(t-7\right)\left(t+3\right)dt$，求曲線 $y=f\left(x\right)$ 的所有切線中，斜率最小的切線方程式._______

12.函數 $f\left(x\right)=x^3-9x^2+15x-7$ 圖形的切線中，過點 $P\left(0,a\right)$ 的恰有相異兩條，求 a 之值 ＝ __

13.求區域 $S=\{(x,y)\mid 0\le a\le 1, 0\le b\le 1, x=a+b+1, y=2a-3b+1\}$ 所圍成的區域面積________

14.已知 $A(-4,13,1)$ 、 $B(4,8,5)$ ，若點 P 在平面 $E: x+3y-z=1$ 上，試求當 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最 小值時， P 點之坐標___________

二、計算證明題：共 4 題，請在答案卷上自行標註題號作答。共 30 分

1. n為正整數，証明： $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$ (6 分)

2. $f(x)$ 是二次多項式，若實數 a,b,c 使得 $f(15)=af(11)+bf(12)+cf(14)$ ，求 $a+b+c$ 。(8 分)

3. 設最簡分數 $\frac{b}{a}<1$, a、b 都是正整數，$b>1$, 且 $a+b<100$。如果將最簡分數 $\frac{b}{a}$ 的分子減 1、分母不變，則 $\frac{b-1}{a}$ 可約分。將 $\frac{b-1}{a}$ 約為最簡分數後，其分子與分母之和比 $\frac{b}{a}$ 分子與分母之和少了 78。試求 a 和 $b-1$ 之最大公因數所有可能值。(8 分)

4. 邊長為2的正四面體PQRS，自平面PRS上兩點A、B對底面QRS作垂直投影，投影點為D、C，自平面PQS上點E對底面QRS作垂直投影，投影點為 F，自平面PQR上點H對底面QRS作垂直投影，投影點為G，若ABCDEFGH 為正立方體的八個頂點，求此正立方體的邊長。(8分)