

國立彰化高級中學 105 學年度教師甄選 數學科試題

說明:

(A) 測驗時間: 120 分鐘

(B) 第 1 題到第 13 題, 每題 5 分; 第 14 題到第 18 題 7 分; 滿分 100 分。答案卷上請標題號, 需計算過程(或想法), 否則, 不予計分。

1. 下列方程組

$$\begin{cases} x + y = 3(z + u) \\ x + z = 4(y + u) \\ x + u = 5(y + z) \end{cases}$$

的解 (x, y, z, u) , 其中 x, y, z, u 皆為正整數, 求 x 可能的最小值為何?

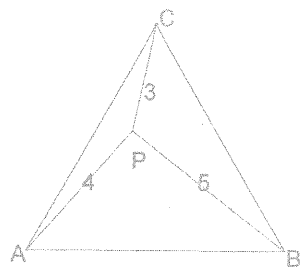
2. 設甲乙兩袋球, 甲袋有一白球一黑球, 乙袋有一白球, 從甲袋隨機取一球放入乙袋, 再從乙袋隨機取一球放回甲袋, 完成這樣的動作稱為一局, 試求 n 局後甲袋有一白球一黑球的機率為何?

3. 求 $(\sqrt{9+\sqrt{17}})^3 - (\sqrt{9-\sqrt{17}})^3 = ?$

4. 若 a, b, c, d, e, f 均為實數, $f(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ 有8個實係數一次因式, 求 $f(x) = ?$

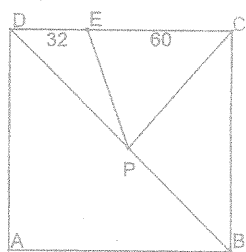
5. 試求函數 $f(x)$, 對任意實數 $x, |x| \neq 1$, 滿足 $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$

6. P 為正三角形 $\triangle ABC$ 內的一點(如下圖), 其中 $\overline{PA} = 4$ 、 $\overline{PB} = 5$ 、 $\overline{PC} = 3$, 試求 $\triangle ABC$ 的面積。



7. 若多項式 $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{11} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{43}x^{43} + x^{44}$, 試求 $a_6 = ?$

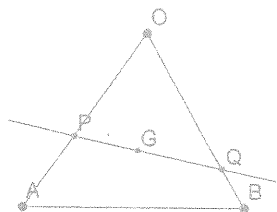
8. 有一正方形 $ABCD$ (如下圖), 其中 E 點為 \overline{CD} 邊上的點且 $\overline{DE} = 32$ 、 $\overline{EC} = 60$, P 點為對角線 \overline{BD} 上一動點, 試問兩線段和 $\overline{PE} + \overline{PC}$ 的最小值為何?



9. 設 $x, y \in R$ ，則 $\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 4y + 38}$ 的最小值為何？

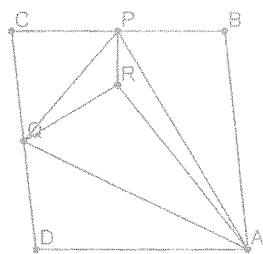
10. 在 $1^2, 2^2, \dots, 2016^2$ 這些數中十位數的數字為奇數的數共有幾個？

11. 設 G 為 $\triangle OAB$ 的重心 G ，過 G 的直線與 \overline{OA} 、 \overline{OB} 交於 P 、 Q 兩點(如圖)，若 $\overline{OP} = h\overline{OA}$ ， $\overline{OQ} = k\overline{OB}$ ，且 $\frac{\triangle OPQ \text{ 面積}}{\triangle OAB \text{ 面積}} = \frac{9}{20}$ ，則 $h^2 + k^2$ 之值為何？



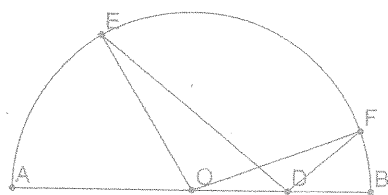
12. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e$ ，求 $a = ?$

13. 如圖，設正方形 $ABCD$ 之邊長為 1，而 P, Q 依次為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 之中點，若將此正方形沿 \overline{AP} 、 \overline{AQ} 、 \overline{PQ} 向上摺起，使 B, C, D 三點重合為一點 R ，則四面體 $R-APQ$ 中， $\triangle APQ$ 面上的高為多少？



14. $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2015^2} + \frac{1}{2016^2}} = ?$

15. 如圖，若 \overline{AB} 為直徑， O 為圓心， E, F 為圓上兩相異點， D 在 \overline{OB} 上且 $\angle OED = \angle OFD = 20^\circ$ ， $\angle AOE = 60^\circ$ ，求 $\angle BOF = ?$



16. 相異三複數 z_1, z_2, z_3 且 $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = 1 + i$ ， $\text{Arg}(z_1) = \theta_1, \text{Arg}(z_2) = \theta_2, \text{Arg}(z_3) = \theta_3$ ，求 $\tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \tan \theta_3 = ?$

17. 若對 $n = 4, 6, 8, 10$ ，實數 a, b, c, d 滿足 $\frac{a^2}{n^2-3^2} + \frac{b^2}{n^2-5^2} + \frac{c^2}{n^2-7^2} + \frac{d^2}{n^2-9^2} = 1$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ?$

18. $a, b, c \in R^+$ ，證明 $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(ab + bc + ca)$ 。