

臺北市立松山家商 105 學年度第 1 次教師甄選初試數學科 參考答案

第壹部分：填充題（佔 64 分）：每題答對得 8 分。

題號	1	2	3	4
答案	10000	36	$\sqrt{21}$	6
題號	5	6	7	8
答案	$\left(\frac{52}{15}, \frac{28}{5}\right)$	27	$(2, -\frac{49}{4})$	366

第貳部份：計算證明題（佔 36 分） 每題 12 分

1

$$(1) \quad Q(0) = a + b = 6000$$

$$(2) \quad Q(4) = a + b \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = a + \frac{4}{25}b = 9360$$

兩式聯立解得 $a = 10000$, $b = -4000$

$$Q(N) = 10000 - 4000 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-0.5N} > 9500 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-0.5N} < \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow -0.5N(1 - 2\log 2) < -3 \cdot \log 2$$

$$\Rightarrow N > \frac{0.9030}{0.5 \times 0.3980} = 4. \dots$$

$$\Rightarrow n \geq 5$$

2

解：利用平方和公式得 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

利用立方和公式得 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

$$\text{再令 } x + y = \alpha, xy = \beta \text{ (代換法)} \quad \begin{cases} x + y = \alpha = 4 \\ (\alpha^2 - 2\beta)(\alpha^3 - 3\alpha\beta) = 280 \end{cases}$$

$$(8 - \beta)(16 - 3\beta) = 35 \Rightarrow 3\beta^2 - 4\beta + 93 = 0$$

$$(3\beta - 31)(\beta - 3) = 0 \Rightarrow \beta = 3 \vee \beta = \frac{31}{3}$$

$$(1) \text{利用根與係數} \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 1) \vee (1, 3) \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = \frac{31}{3} \end{cases} \Rightarrow t^2 - 4t + \frac{31}{3} = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 31 = 0$$

但是「判別式」 $(-12)^2 - 4(3)(31) = -228 < 0 \Rightarrow$ 無實數解，利用虛數 $i = \sqrt{-1}$ 可以得到二組複數根

$$(x, y) = (2 + \frac{\sqrt{57}}{3}i, 2 - \frac{\sqrt{57}}{3}i) \vee (2 - \frac{\sqrt{57}}{3}i, 2 + \frac{\sqrt{57}}{3}i) \quad (6 \text{ 分})$$

3.

因 $n^2 = (m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1$ ，所以 $(2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1 = 12m^2 + 12m + 3 = 3(2m+1)^2$ 。

因 $2n-1, 2n+1$ 互質，所以這兩個數一個是奇數平方，另一個是奇數平方乘以 3。

但若 $2n-1$ 是奇數平方乘以 3 且 $2n+1$ 是奇數平方，因 $2n-1 \equiv 0 \pmod{3}$ 故知 $2n+1 \equiv 2 \pmod{3}$ ，

但因平方數除以 3 的餘數必為 0 或 1，得矛盾，所以 $2n-1$ 是奇數平方。

設 $2n-1 = b^2$ ($b > 1$ 是奇數)，因 $2n+287$ 是一個正整數的完全平方，

設 $2n+287 = a^2$ (a 是奇數)，得 $a^2 - b^2 = 288$ 。

所以 $a+b=144$ ， $a-b=2$ (因為 $a+b$ 與 $a-b$ 均為偶數且 $2n+1$ 是奇數平方乘以 3，故其他組合皆不合)，得 $b=71$ 。而 $2n-1=5041$ ， $n=2521$ ，得 $2n+1=5043=3 \times 41^2$ ，所以 $m=1455$ 。