

國立臺南第二高級中學 106 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

一、填充題：每題 5 分，本大題共 70 分

1. 已知 $A(1,1,2)$ 、 $B(-1,0,3)$ 、 $C(3,8,1)$ 及 D 點為空間中四點，其中 D 在 $L: \begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x-y+7z=9 \end{cases}$ 上，求四面體 $ABCD$ 之體積 _____
2. 一四面體 $ABCD$ 置於空間坐標系中，其中 $A(0,0,0)$ ， D 在 z 軸上。若 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 3$ ， $\overline{BD} = \overline{CD} = 4$ ， $\overline{AD} = 5$ ，將此四面體繞 z 軸旋轉一圈，繞行的區域所得體積為 _____
3. 若 $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{2}\pi$ 且 $y = \frac{5\cos x}{3-\cos x}$ ，試求 y 的範圍 _____
4. 設 A 、 B 、 O 為複數平面上三點，分別表示複數 α 、 β 、 0 。若 α 、 β 同時滿足 $|\alpha-3|=1$ 和 $\beta = (-1+i)\alpha$ ，則 $\triangle ABO$ 面積最大值與面積最小值的總和為 _____
5. 若已知實函數 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{6+x-x^2}}$ ，則 $f(x)$ 的定義域為 _____
6. $(7242409)^{10}$ 除以 101×102 的餘數為 _____
7. 解方程式 $2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$ ，得到的 6 個根中，落在複數平面第一象限的所有根為 _____
8. 數學科普作家馬丁·加德納(Martin Gardner, 1914-2010)曾說：「世界上僅存在一個九位數，其中首位數是 1 的倍數，前兩位數是 2 的倍數，前三位數是 3 的倍數，...，前八位數是 8 的倍數，前九位數是 9 的倍數，但是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 每個數字都只能出現一次。」請問這個九位數為 _____
9. 已知一數列 $\{a_n\}$ ，其中 $a_n = n^3 + 2n^2 - 200n$ ， n 為正整數，則 $\sum_{n=1}^{20} |a_n| =$ _____
10. 若 1, 2, 3, 4, ..., 99998, 99999, 100000 這十萬個正整數中，各位數字和不大于 10 的正整數有 k 個，(例如：3211 就是其中一個，因為 $3+2+1+1=7 \leq 10$ 。) 試求 k 的值= _____
11. 設 $\triangle ABC$ 之外心為 O ，垂心為 H ，若 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$ ，且 $\overrightarrow{AH} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____

12. 已知函數 $y = x + \log_2(kx^2)$ 的圖形與函數 $y = x + 2^{|x|}$ 的圖形交於 A 、 B 兩點。

若 $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ ，則 $k =$ _____。

13. 三人猜拳(剪刀、石頭、布)直到最後有一人獲勝為止，則猜拳次數的期望值為_____。

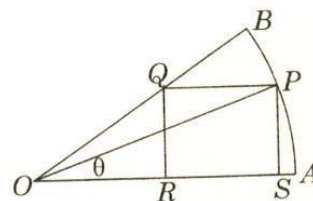
14. 設 $S = \frac{2^2}{1 \times 3} + \frac{4^2}{3 \times 5} + \frac{6^2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2016^2}{2015 \times 2017}$ 。求與 $2S$ 最接近的整數為_____。

二、計算與證明題：每題 10 分，本大題共 30 分

1. 如圖，矩形 $PQRS$ 內接於半徑為 3 且中心角為 $\frac{\pi}{3}$ 之扇形 OAB ，

(1) 將 \overline{RS} 、 \overline{PS} 以 θ ($\theta = \angle POA$) 的函數表之 (2 分)

(2) 求矩形 $PQRS$ 的最大面積 (8 分)



2. 用 4 種顏色塗正 n 邊形的 n 個邊，若規定相鄰邊不同顏色，其方法有 a_n 種。

(1) 試求 a_3 及 a_4 的值。(4 分)

(2) 試以 n 表示出 a_n 的值，其中 $n \geq 3$ 。(6 分)

3. 求函數 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} + \sqrt{x^4 - 3x^2 - 8x + 20}$ 的最小值及此時的 x 值。(10 分)

國立臺南第二高級中學 106 學年度第 1 次教師甄選數學科試題參考答案

一、填充題：每題 5 分，本大題共 70 分

1. 1

2. $\frac{48}{5}\pi$

3. $-\frac{5}{4} \leq y \leq 0$

4. 10

5. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } -1 \leq x < 3\}$

6. 1327

7. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 或 $\frac{3+\sqrt{7}i}{4}$

8. 381654729

9. 24402

10. 2998

11. $(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$

12. $\frac{256}{9}$

13. $E = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times (1 + \frac{3}{2}) + \frac{1}{3} \times (1 + E) \Rightarrow E = \frac{9}{4}$

14. 2017

二、計算與證明題參考答案：每題 10 分，本大題共 30 分

1. 答：(1) $\overline{PS} = \overline{QR} = 3\sin\theta$

$$\overline{RS} = \overline{OS} - \overline{OR} = \overline{OS} - \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{QR} = 3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$$

(2) 面積最大為 $3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

2. (1) $a_3 = 24, a_4 = 84$

(2) $a_n = 3^n + 3(-1)^n, n \geq 3$

3. 最小值為 4
此時 $x = \sqrt{2}$