

新北市立高級中等學校 107 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

一、填充題：70%，每題 10 分。

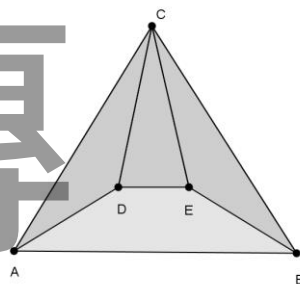
1. 若 x, y, z 滿足
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3+\log 2} + \frac{z}{3+\log 5} = 1 \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{7+\log 2} + \frac{z}{7+\log 5} = 1 \\ \frac{x}{11} + \frac{y}{11+\log 2} + \frac{z}{11+\log 5} = 1 \end{cases}$$
，則 $x+y+z$ 之值為_____。

2. 坐標空間中，圓 O 是平面 $y=z$ 上以原點 $(0,0,0)$ 為圓心的單位圓。若點 P 的坐標為 $(4,4,12)$ ，而點 X 是圓 O 上的動點，則 \overline{PX} 的最大值為_____。

3. 設 $f(x)$ 是最高次項係數為 2 的三次多項式函數， $g(x)$ 是二次多項式函數，滿足 $f(1)=g(1)+2, f(2)=g(2)+3, f(3)=g(3)+4$ 。若 $3f(1)-3f(2)+f(3)=5$ ，則 $f(x)$ 的常數項係數為_____。

4. 從 4 個 a 、4 個 b 、4 個 c 、4 個 d (共四種、16 個字母) 中選出 10 個字母排成一列 (同一種字母都視為相同)。若每種字母至少選出 2 個，則有_____種排列方式。(答案須化簡至單一的數字才給分！)

5. 如圖， $\triangle ABC$ 為正三角形且 D 、 E 為其內部兩點。已知 $\overline{CD} = \overline{CE} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{DE} = 1$ 、 $\overline{AD} = \overline{BE} = 2$ ，則 \overline{AB} 的長度為_____。



6. 在平面上，令 R 代表由拋物線 $y=x^2$ 、直線 $x=0$ 及直線 $y=1$ 所圍成的區域。試求：區域 R 繞著直線 $y=2$ 旋轉所得的旋轉體之體積為_____。

7. 已知 p 為質數， n 為正偶數，且 $\sqrt{1-\frac{1729}{p^n}}$ 為有理數，則所有可能的 p 值為_____。

二、計算證明題：30%，每題 15 分。

1. (a) 已知三階行列式 $\begin{vmatrix} x & x^3 + ax^2 & b \\ y & y^3 + ay^2 & b \\ z & z^3 + az^2 & b \end{vmatrix}$ 的展開式是 x, y, z 的多項式，其中 a, b 為常數。

試將此多項式分解成 x, y, z 的一次式乘積。 (5 分)

- (b) 試在坐標平面上找出 107 個相異點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{107}$ 的坐標，並滿足：

「任相異三點 A_i, A_j, A_k 共線的充分且必要條件是 $i + j + k = 110$ 。」 (10 分)

2. 已知三角形 ABC 及其 BC 邊上的任意一點 P (其中 P 異於 B 、 C 兩點)，
試證：

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CP} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BP} = (\overline{AP}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{CP}) \cdot \overline{BC}。$$
 (15 分)