

國立臺南女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選題目(數學科)

一、填充題：(每題 5 分，共 50 分)

注意：所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式，否則不予計分

1. 設數列  $\langle x_n \rangle$  滿足  $x_1 = 1$ ，且對任意正整數  $n$ ， $x_n - 2x_n x_{n+1} - x_{n+1} = 0$  均成立。試求  $\sum_{k=1}^{200} x_k x_{k+1}$  之值為\_\_\_\_\_。
2. TWICE 為韓國 JYP 娛樂旗下在 2015 年強勢推出的九人女子團體，成員均透過 Mnet 生存實境節目《SIXTEEN》脫穎而出。成員包含韓國籍成員志效(隊長)、定延、娜璉、多賢、彩瑛、日本籍成員 Momo、Sana、Mina 及台灣籍成員子瑜，公司為籌備新專輯於 5/3 拍攝專輯封面照，已知隊長志效必站在正中央，四位非韓籍的團員不完全站在隊長的同一側，且娜璉跟 Momo 因近來吵架而不排在一起，則此九人排成一行拍照的排列數有\_\_\_\_\_種。
3. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AC} = 4$ 、 $\overline{BC} = 3$ 。在  $\triangle ABC$  內部有一點  $P$  滿足  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ ，且  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ ，則  $\angle C$  的餘弦值為\_\_\_\_\_。
4. 已知函數  $f(x) = \int_c^x (t^2 + at + b) dt$  在  $x = 1, 3$  時有極值，且  $f(0) = \frac{16}{3}$ ，求實數序對  $(a, b, c) =$ \_\_\_\_\_。
5. 已知  $x \in [0, 3]$ ，求  $\frac{\sqrt{6x^3 + 7x^2 + 2x}}{3x^2 + 4x + 1}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

6.若 $[x]$ 表示不超過 $x$ 的最大整數，求 $\sum_{n=1}^{2024} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{n}{3} \right] + \left[ \frac{n}{6} \right] \right) =$ \_\_\_\_\_

7.已知非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 互相垂直，若 $\vec{a} + \vec{b}$ 和 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 的夾角為 $\theta$ ，則 $\cos \theta$ 的最小值為\_\_\_\_\_

8.有三個半徑分別為2、3、4的圓，且這三個圓兩兩外切，切點分別為 $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為\_\_\_\_\_。

9.試求方程式 $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \log \left| x + \frac{\pi}{4} \right|$ 的所有實根之和為\_\_\_\_\_。

10.在直角坐標系中，已知點 $A(9,11)$ ，點 $P$ 為圓 $C: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$ 上一點，點 $Q$ 為直線 $x+y=0$ 上一點，則 $\left| \vec{AP} + \vec{AQ} \right|$ 的最小值為\_\_\_\_\_。

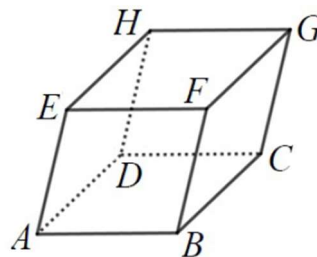
二、計算證明題：(每題 10 分，共 50 分)

1. 設  $n$  為正整數，且  $n \geq 2$ ，又多項式  $f(x) = 3x^n + 2x^{n-1} - 5$  被  $x^2 - 5x + 6$  除之，得餘式為  $p_n x + q_n$ ，則  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{6^n}$  之值為何？

2. 已知  $\triangle ABC$  的三邊長滿足  $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3\overline{AB}^2$ ，則  $\sin C$  的最大值為何？

3. 已知  $x, y$  為實數，且滿足  $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+y^4=1234 \end{cases}$ ，試求  $xy$  之值。

4. 右圖為平行六面體  $ABCD-EFGH$ ，已知  $\overrightarrow{AB} : \frac{x+3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ ， $\overrightarrow{EH} : \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-1}{1}$ ，  
 $\overrightarrow{CG} : \frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-13}{-1}$ 。若不在上述三條直線上的點  $(9, 7, 8)$  是此平行六面體之其中一頂點，  
 則此平行六面體的體積為何？



5. 已知  $\triangle ABC$  滿足  $\sin A = \cos B = \frac{16}{21} \tan C$ ，且  $\overline{AC} = 1$ ，試求  $\triangle ABC$  的面積。

## 國立臺南女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選答案(數學科)

一、填充題：(每題 5 分，共 50 分)

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{200}{401}$	30528	$\frac{5}{6}$	$(-4, 3, -1)$	$\frac{1}{2}$

6.	7.	8.	9.	10.
2047276	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{48\sqrt{6}}{35}$	$-\frac{5\pi}{2}$	$16\sqrt{2}-2$

二、計算證明題：(每題 10 分，共 50 分)

1.  $\frac{7}{6}$

$$\text{詳解：} \begin{cases} f(2) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} - 5 = 4 \cdot 2^n - 5 = 2p_n + q_n \\ f(3) = 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} - 5 = \frac{11}{3} \cdot 3^n - 5 = 3p_n + q_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{11}{3} \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{6^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{11}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{11}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} - 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{11}{6} - \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

2.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

詳解：假設  $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ ， $c = \overline{AB}$ ，

$$\text{由餘弦定理可知，} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a^2 + b^2) - \frac{1}{3}(a^2 + b^2)}{2ab} = \frac{\frac{2}{3}(a^2 + b^2)}{2ab} = \frac{a^2 + b^2}{3ab} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{又由算幾不等式可知：} \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab，\text{所以 } a^2 + b^2 \geq 2ab，$$

$$\text{代入}\textcircled{1}\text{式可得，} \cos C = \frac{a^2 + b^2}{3ab} \geq \frac{2ab}{3ab} = \frac{2}{3}，$$

$$\text{又因為 } \sin^2 C + \cos^2 C = 1，\text{所以 } \sin^2 C = 1 - \cos^2 C \leq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}，\text{即 } \sin C \text{ 有最大值 } \frac{\sqrt{5}}{3}。$$

3. -21

詳解：設  $xy = p$ 

$$\text{則 } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2p$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = (4 - 2p)^2 - 2p^2 = 2p^2 - 16p + 16 = 1234$$

$$\Rightarrow p^2 - 8p - 609 = 0$$

$$\Rightarrow (p + 21)(p - 29) = 0$$

$$\Rightarrow p = -21 \text{ 或 } 29$$

$$\text{又因為 } x^2 + y^2 = 4 - 2p \geq 0 \Rightarrow p \leq 2，$$

$$\text{所以 } xy = p = -21$$

詳解：

$$(i) \text{ 若 } D(9, 7, 8), \text{ 則 } \overrightarrow{AD}: \frac{x-9}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{1}, A: \begin{cases} 2s+9=2t-3 \\ -s+7=t \\ s+8=2t-1 \end{cases} \Rightarrow s, t \text{ 無實數解}$$

$$(ii) \text{ 若 } F(9, 7, 8), \text{ 則 } \overrightarrow{BF}: \frac{x-9}{2} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-8}{-1}, B: \begin{cases} 2s+9=2t-3 \\ 2s+7=t \\ -s+8=2t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-1 \\ t=5 \end{cases} \Rightarrow B(7, 5, 9),$$

$$\overrightarrow{v_{AB}} \times \overrightarrow{v_{AD}} = (2, 1, 2) \times (2, -1, 1) = (3, 2, -4)$$

則平面  $ABCD$  的方程式為  $3x+2y-4z=-5$ ，設  $F$  對  $\overleftrightarrow{EH}$  的垂足點為  $P(2m+1, -m+5, m+1)$ ， $F$  對  $\overleftrightarrow{CG}$  的垂足點為

$$Q(2n+7, 2n-1, -n+13), \text{ 則 } \overrightarrow{FP} = (2m-8, -m-2, m-7) \text{ 且 } \overrightarrow{FQ} = (2n-2, 2n-8, -n+5), \begin{cases} \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{v_{EH}} = 0 \\ \overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{v_{CG}} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{7}{2} \\ n = \frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{FP} = \left(-1, -\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}\right), \overrightarrow{FQ} = \left(\frac{32}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{20}{9}\right), |\overrightarrow{FP}| = \frac{\sqrt{174}}{2}, |\overrightarrow{FQ}| = \frac{2\sqrt{53}}{3}$$

令  $\overleftrightarrow{EF}$  與  $\overleftrightarrow{EH}$  的銳夾角為  $\alpha$  且  $\overleftrightarrow{FG}$  與  $\overleftrightarrow{CG}$  的銳夾角為  $\beta$

$$\text{則 } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{v_{EF}} \cdot \overrightarrow{v_{EH}}|}{|\overrightarrow{v_{EF}}| |\overrightarrow{v_{EH}}|} = \frac{5}{3\sqrt{6}} \text{ 且 } \cos \beta = \frac{|\overrightarrow{v_{FG}} \cdot \overrightarrow{v_{CG}}|}{|\overrightarrow{v_{FG}}| |\overrightarrow{v_{CG}}|} = \frac{1}{3\sqrt{6}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}} \text{ 且 } \sin \beta = \frac{\sqrt{53}}{3\sqrt{6}}$$

$$|\overrightarrow{FP}| = \overline{EF} \sin \alpha = \frac{\sqrt{174}}{2} \rightarrow \overline{EF} = 9 \text{ 且 } |\overrightarrow{FQ}| = \overline{FG} \sin \beta = \frac{2\sqrt{53}}{3} \rightarrow \overline{FG} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{平行六面體的體積} = \overline{EF} \times \overline{FG} \times \sin \alpha \times d(F, \text{平面 } ABCD) = 9 \times 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}} \times \frac{14}{\sqrt{29}} = 84$$

$$5. \frac{7\sqrt{2}}{9}$$

詳解：

$$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm B\right) \Rightarrow \sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm B\right) \Rightarrow \angle A = \frac{\pi}{2} \pm \angle B, \text{ 若 } \angle A = \frac{\pi}{2} - \angle B, \text{ 則 } \angle C = \frac{\pi}{2}, \tan C \text{ 無意義(不合),}$$

$$\text{故 } \angle A = \frac{\pi}{2} + \angle B$$

$$\angle A = \frac{\pi}{2} + \angle B \Rightarrow \angle C = \frac{\pi}{2} - 2\angle B \Rightarrow \cos B = \frac{16}{21} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2B\right) = \frac{16}{21} \cdot \frac{1}{\tan 2B} = \frac{16}{21} \cdot \frac{\cos 2B}{\sin 2B}$$

$$\cos B = \frac{16}{21} \cdot \frac{1 - 2\sin^2 B}{2\sin B \cos B} \Rightarrow 21\sin B \cos^2 B = 8(1 - 2\sin^2 B) \Rightarrow 21\sin B(1 - \sin^2 B) = 8(1 - 2\sin^2 B)$$

$$21\sin^3 B - 16\sin^2 B - 21\sin B + 8 = 0 \Rightarrow (3\sin B - 1)(7\sin^2 B - 3\sin B - 8) = 0, \sin B = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{3 \pm \sqrt{233}}{14}$$

$$\text{注意 } \sin B = \frac{3 + \sqrt{233}}{14} > 1 \text{ (不合) 及 } \sin B = \frac{3 - \sqrt{233}}{14} < 0 \Rightarrow \angle B > \frac{\pi}{2} \text{ (不合), 故 } \sin B = \frac{1}{3}, \text{ 得 } \cos B = \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos A = -\frac{1}{3},$$

$$\tan C = \frac{7\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \sin C = \frac{7\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{7}{9}, \text{ 由正弦定理 } \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin A} \text{ 得 } \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}, \overline{BC} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{則 } a\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7\sqrt{2}}{9}$$