

臺北市立大直高級中學 113 學年度第一次專任教師甄選 數學 科甄試試題

一、填充題（48 分）

1. 已知  $a, b, c$  為相異之正整數，且滿足  $abc = 2310$ ，則集合  $\{a, b, c\}$  共有\_\_\_\_\_種可能。
2. 若有一正數數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1$ ，其中  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，且  $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = a_n$  ( $n \geq 2$ )，求  $S_{20} - S_{19} + S_{18} =$ \_\_\_\_\_。
3. 若  $a_n = \begin{vmatrix} n & n+1 & 0 \\ n+2 & n+1 & n+2 \\ n+2 & 0 & n+2 \end{vmatrix}$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} =$ \_\_\_\_\_。
4. 在  $\triangle OAB$  中， $C$  為  $\overline{OA}$  的中點， $D$  在  $\overline{BC}$  上且  $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ 。現延長  $\overline{OD}$  交  $\overline{AB}$  於  $E$ ，延長  $\overline{AD}$  交  $\overline{OB}$  於  $F$ ，若  $\triangle CEF$  面積為  $m$ ， $\triangle OAB$  面積為  $M$ ，則  $\frac{m}{M}$  為\_\_\_\_\_。
5. 若  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ，且  $(a_k + b_k i)^3 = -8i$ ，其中  $k = 1, 2, 3$ ，則  $\sum_{k=1}^3 |a_k + b_k i| =$ \_\_\_\_\_。
6. 若  $ABCD$  為一給定的矩形，長  $\overline{AB} = 20$ 、寬  $\overline{BC} = 5$ 。若過  $A$  點作一直線交  $\overline{CD}$  於  $P$ ，且與  $\overline{BC}$  邊的延長線交於  $Q$ ，則當  $\overline{CP}$  長度為\_\_\_\_\_時， $\triangle ADP$  與  $\triangle CPQ$  之面積和為最小。
7. 設橢圓  $\Gamma$  之方程式為  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，兩焦點為  $F_1(0, c)$  及  $F_2(0, -c)$ ，其中  $c > 0$ 。設  $R$  為  $\Gamma$  內部而被兩正焦弦所夾之區域。將  $R$  繞  $\Gamma$  的長軸旋轉一周，而形成一酒桶狀立體區域  $V$ ，則體積  $V$  之值為\_\_\_\_\_。
8. 空間中有  $A(-1, 3, 2)$ ， $B(3, 3, 4)$  兩點，過  $A, B$  兩點且球心在平面  $E: 5x - 2y + 5z - 5 = 0$  上之球面有無限多個，則其中半徑最小之球面  $S$  的方程式為\_\_\_\_\_。

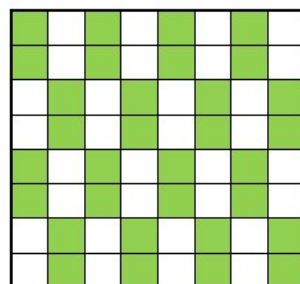
## 二、非選題（52 分）

1. 已知有三正數  $x, y, z$  滿足  $x > z$  且  $y > z$ ，試證明  $\sqrt{z(x-z)} + \sqrt{z(y-z)} \leq \sqrt{xy}$   
(13 分)

2. 在坐標空間中， $xz$  平面上有一直線  $L: \sqrt{3}x - z - 6 = 0$ ，將此直線繞  $z$  軸旋轉得到一個直圓錐面，此圓錐面和  $xy$  平面圍成一個圓錐體。現將一球塞進此圓錐體中，則此球面半徑最大時的球心坐標為\_\_\_\_\_。  
(13 分)

3. 右圖為一個  $8 \times 8$  的黑白色棋盤，現欲將此棋盤分割成  $n$  個矩形，規定不能破壞棋盤上的任何一格，並且須滿足下述二個條件：

- (1) 每一個矩形中白格與黑格的個數相等；
- (2) 若  $a_i$  為第  $i$  個矩形的面積，則  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$



試問滿足上述分割的最大可能  $n$  值為何？並且畫出此  $n$  值的所有分割。

(13 分)

4. 如果現在欲指導學生進行數學專題研究，請以上題(第 3 題)為題材延伸，試擬定這份專題的研究題目，並撰寫研究目的、研究步驟，及簡要研究過程，以及說明您如何指導學生進行專題研究。

(13 分)

填充題解答：

1. (Ans. 40)

2. (Ans. 363)

3. (Ans.  $\frac{1}{4}$ )

4. (Ans.  $\frac{6}{25}$ )

5. (Ans.  $2+2\sqrt{3}$ )

6. (Ans.  $20-\sqrt{200}$ )

7. (Ans.  $\frac{1416\pi}{25}$ )

8. (Ans.  $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=14$ )