

國立新竹科學園區實驗高級中等學校 113 學年度第一次教師甄選試題卷
考試科目：專業知識與教材教法

甄選科別：國中數學

計算證明題，每題 10 分，共 10 題。(請寫下完整過程，否則不予計分)

1. 箱子裡有若干個紅球與藍球，球總個數不超過 200 個，今從箱子一次取出兩球，每個球被取到的機會均等，若取出的兩球是同色球的機率為 $\frac{1}{2}$ ，則箱子裡球的總個數共有幾種可能？

13 種

2. 已知當 $-2 \leq x \leq 1$ 時，函數 $f(x) = -x^2 + 2mx - m + 1$ 有最大值 3，試求實數 m 的值。

-1 或 3

3. 已知關於 x 的不等式組 $\begin{cases} x < a+1 \\ 2x-2 > a \end{cases}$ 的解集合中的整數恰好有兩個，試求實數 a 的取值範圍。

$3 < a < 4$ 或 $4 < a \leq 5$ 或 $a = 6$

4. 解方程式 $\log_{0.5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$ 。

$x = 1, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，且 $\begin{cases} a+b+c+d=3 \\ a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5 \end{cases}$ ，求 a 之最大值和最小值。

最大值為 2，最小值為 1

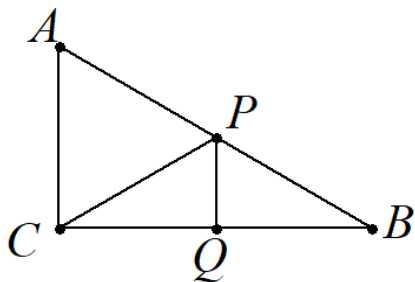
6. 設 a, b 為實數，且 $x^2 + x - 1$ 整除 $ax^{18} + bx^{16} + 7$ ，試求 a 的值。

6909

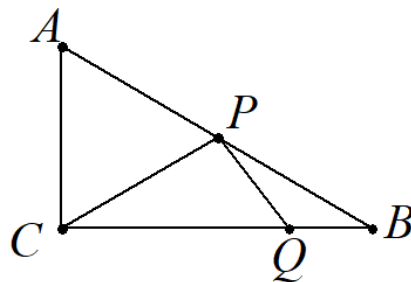
7. 已知直角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}=5$ ， $\overline{BC}=12$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ， P 是 \overline{AB} 上的動點（與 A 、 B 不重合）， Q 是 \overline{BC} 上的動點（與 B 、 C 不重合）。請問：

(1) 如圖（一），當 $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ 時，且 Q 為 \overline{BC} 的中點，則 $\overline{CP} = ?$

(2) 如圖（二），當 \overline{PQ} 與 \overline{AC} 不平行時， $\triangle PCQ$ 可能為直角三角形嗎？若有可能，請求出 \overline{CQ} 的値之範圍；若不可能，請說明理由。



圖（一）



圖（二）

(1) $\overline{CP} = \frac{13}{2}$ (2) 當 $\frac{20}{3} \leq \overline{CQ} < 12$ 時， $\triangle CPQ$ 可能為直角三角形。

8. 已知 $\triangle ABC$ 之三頂點坐標為 $A(0,0)$ ， $B(3,0)$ ， $C(0,6)$ ，且點 P 為圓 $\Gamma: x^2 + y^2 - 8x - 12y + 51 = 0$ 上的一點，試求：

(1) $\triangle ABC$ 之重心 G 的坐標。

(2) $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 之最小值，以及此時點 P 之坐標。

(1) $G(1,2)$ (2) $P(\frac{17}{5}, \frac{26}{5})$

9. 設 $b > 0$ 且 $b \in \mathbb{R}$ ，證明：方程式 $x^n = b (n \in \mathbb{N})$ 恰有一正實根。

10. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\triangle ABC$ 的內切圓與 \overline{DE} 、 \overline{BC} 分別切於點 M 、 N ，試證： $\frac{\overline{BN}}{\overline{EM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$ 。

