

# 新竹市 113 學年度 國民中學四校教師聯合甄選 數學科目試題

## 壹、選擇題：佔 60 分(共 30 題，每題 2 分)

1. 已知目前發現最大的質數為  $2^{82589933} - 1$ ，試問此數展開後，其個位數字為下列何者？  
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
2. 在直角三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，令  $x = \frac{a}{c}$  且  $y = \frac{b}{c}$  且滿足  $13xy = 15(x+y) - 15$ ，則  $x+y$  之值為下列何者？  
(A) 1 (B)  $\frac{17}{13}$  (C) 2 (D)  $\frac{30}{13}$
3. 已知  $f(x)$  為連續函數，如果  $\int_0^{x^2} f(t) dt = \sqrt{1+x^2} - 1$ ，則  $f(2)$  之值為下列何者？  
(A)  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$  (B)  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$  (C)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (D)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$
4. 已知  $a = \sqrt{11+6\sqrt{2}} = n+b$ ，其中  $n$  表示為  $a$  的正整數部分且  $b$  為  $a$  的小數部分， $0 < b < 1$ ，則  $b^2 + 2a + n$  之值為下列何者？  
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15
5. 試問極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$  之值為下列何者？  
(A) 0 (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 不存在
6. 令  $a = 3 - \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt{5} - 2$  及  $c = 5 - 2\sqrt{5}$ ，則此三數由小而大的排列順序為下列何者？  
(A)  $c < b < a$  (B)  $b < c < a$  (C)  $b < a < c$  (D)  $a < b < c$
7. 試求極限  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt$  之值為下列何者？  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 2
8. 化簡  $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$  之值為下列何者？  
(A) 98 (B)  $98\frac{1}{100}$  (C) 99 (D)  $99\frac{1}{100}$
9. 長方形  $ABCD$  中， $E$  為  $\overline{BC}$  中點， $F$  為  $\overline{CD}$  中點。如果  $\angle AEF$  為直角，則  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$  之比值為下列何者？  
(A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\sqrt{2}$
10. 試求極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n} \right)$  之值為下列何者？  
(A)  $\ln 2$  (B)  $2\ln 2$  (C) 1 (D) 2
11. 已知數列  $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots\}$  滿足  $a_0 = 1$ ，及  $a_{n+1} = 7a_n + 3$ ，其中  $n = 0, 1, 2, \dots$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{7^n}$  之值為下列何者？  
(A)  $\frac{3}{2}$  (B) 3 (C)  $\frac{7}{2}$  (D) 7

12. 自 1, 2, 3, ..., 9 這 9 個數中選出 7 個不同的數相加，其和是 3 的倍數，則共有多少種不同的選法滿足上述條件？  
 (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14
13. 試問下列哪一個選項是正確？  
 (A)  $5^{56} < 31^{28} < 17^{35} < 10^{51}$  (B)  $5^{56} < 17^{35} < 10^{51} < 31^{28}$   
 (C)  $5^{56} < 10^{51} < 17^{35} < 31^{28}$  (D)  $17^{35} < 5^{56} < 10^{51} < 31^{28}$
14. 已知正數  $a, b$  滿足條件  $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$ ，則  $\frac{b}{a}$  之值為下列何者？  
 (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{8}{5}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (D)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
15. 已知  $a, b$  為正整數，且滿足條件  $\sqrt{1683} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ，則  $a+b$  之值為下列何者？  
 (A) 561 (B) 748 (C) 935 (D) 1122
16. 試問方程式  $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$  共有多少個整數解  $x$ ？  
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
17. 已知實數  $x, y$  滿足條件  $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$  與  $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，則  $\sin(x+y)$  之值為下列何者？  
 (A)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
18. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，且令  $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ ，其中  $a \neq c$ 。如果  $\alpha, \beta$  為一元二次方程式  $a(1-x^2) - 2\sqrt{2}bx + c(1+x^2) = 0$  的二個實數解，且  $\alpha^2 + \beta^2 = 12$ ，則  $a:b:c$  之比為下列何者？  
 (A)  $1:2\sqrt{2}:3$  (B)  $\sqrt{2}:1:\sqrt{3}$  (C)  $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$  (D)  $2\sqrt{2}:1:3$
19.  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 75^\circ, \angle BCA = 45^\circ$ ，如果  $P$  為  $\overline{BC}$  上的點使得  $\overline{BP} = 2\overline{PC}$ ，則  $\angle APB$  的度數為下列何者？  
 (A)  $60^\circ$  (B)  $75^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $120^\circ$
20.  $\triangle ABC$  中，如果  $\angle C = 30^\circ, \overline{AC} = 2 + 2\sqrt{3}, \overline{BC} = 4$ ，則  $\angle B$  的度數為下列何者？  
 (A)  $45^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $75^\circ$  (D)  $105^\circ$
21. 已知一長方體的體積為 8 立方公分，其表面積(即六個面的面積和)為 32 平方公分，如果此長方體的長、寬及高成等比數列，則此長方體最大的邊長為下列何者？  
 (A)  $3 - \sqrt{5}$  (B) 2 (C) 3 (D)  $3 + \sqrt{5}$
22. 已知三角形  $ABC$  之三邊長分別為  $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ ，且其外接圓半徑為  $R$ ，若  $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ ，則下列何者錯誤？  
 (A)  $\angle A = 45^\circ$  (B)  $\angle B = 45^\circ$  (C)  $b = c$  (D)  $a = 2R$
23. 如果實數  $a, b$  為一元二次方程式  $x^2 - 3x + 1 = 0$  的二個解，且  $a > b$ ，則  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$  之值為下列何者？  
 (A)  $-3\sqrt{5}$  (B)  $-\sqrt{5}$  (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $3\sqrt{5}$
24. 設  $a$  為正整數，如果三個數 10, 24 及  $a$  可構成一個銳角三角形的三邊長，試問滿足這樣條件的  $a$  值共有多少個？  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

25. 已知  $a, b$  皆為實數，如果極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + 3x + 4} - (ax + b) = 0$ ，則  $a + b$  之值為下列何者？

- (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\frac{5\sqrt{2}}{4}$  (C)  $\frac{7\sqrt{2}}{4}$  (D)  $2\sqrt{2}$

26. 已知有一組數據資料：2, 4, 6,  $a$ , 7, 9 的算術平均數為  $b$ ，其中  $a$  為正整數且  $b > 0$ 。如果  $a, b$  為一元二次方程式

$(x-3)^2 = x-1$  的二個解，則此組數據的中位數是下列何者？

- (A) 5 (B)  $5\frac{1}{2}$  (C) 6 (D)  $6\frac{1}{2}$

27. 設  $n$  為整數，如果  $\frac{4n}{n^2 + n + 2}$  為整數，則滿足這樣條件的  $n$  值共有少個？

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

28. 下列敘述何者正確？

- (A) 無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是收斂  
(B) 如果無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  為收斂級數，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$   
(C) 如果無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  為發散級數，則  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  必為發散級數  
(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$  是收斂且和為 2

29. 已知  $a, b$  皆為實數，如果函數  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{當 } x \geq 1 \\ ax + b, & \text{當 } x < 1 \end{cases}$  在  $x=1$  處為可微(differentiable)，則  $a - b$  之值為下列何者？

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

30. 已知  $A$  為  $n$  階方陣，下列有關  $A$  為可逆矩陣的性質是錯誤的？

- (A) 齊次線性方程組  $Ax = 0$  只有一組解  $x = 0$ 。  
(B) 對任意  $b \in \mathbb{R}^n$ ，則方程組  $Ax = b$  恆有解。  
(C)  $\det(A) \neq 0$ 。  
(D)  $\text{rank}(A) < n$ 。

貳、教學與評量設計測驗：佔 40 分(共 2 題，每題 20 分)，請在提供的答案卷寫下答案。

1. 請以提供的數學教材內容(附件一)從中選擇教材內容，設計一份素養導向的教學活動(提供格式如附件二，亦可以自行修改)(20 分)

(1)對象：新竹市公立國中學生

(2)時間：45 分鐘

2. 依據上面之教學活動，請設計出一份符合 108 課綱學習表現之學習單(20 分)